理科现代科技研究丛书

集论拓扑学引论

戴牧民　编著

广西师范大学出版社

集论拓扑学引论

戴牧民　编著

广西师范大学出版社
·桂林·

图书在版编目（CIP）数据

集论拓扑学引论／戴牧民编著. —桂林：广西师范大学出版社，2003. 2

ISBN 7-5633-3852-7

Ⅰ. 集… Ⅱ. 戴… Ⅲ. 集论拓扑 Ⅳ. 0189. 21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 005939 号

广西师范大学出版社出版发行

（桂林市育才路 15 号　邮政编码：541004
网址：http://www.bbtpress.com.cn）

出版人：萧启明

全国新华书店经销

广西师范大学出版社印刷厂印刷

（广西桂林市临桂县金山路 168 号　邮政编码：541100）

开本：890 mm×1 240 mm　1/32

印张：8.75　插页：2　字数：252 千字

2003 年 2 月第 1 版　2003 年 2 月第 1 次印刷

印数：001～500　定价：15.00 元

序　言

在拓扑学发展的早期阶段,就曾出现过一些令拓扑学家们绞尽脑汁也难以回答的问题.例如,第一可数的紧 Hausdorff 空间是否一定具有连续统的势,有没有正则的、遗传可分的、非 Lindelöf 的空间或者正则的、遗传 Lindelöf 的不可分的空间,是否每个序完备的、满足可数链条件的、自密的全序集都同构于一个区间,是否每一个正规 Moore 空间都是可度量的,等等.由于没有找到好的方法或者强有力的工具,这些问题要么长期以来得不到解决,要么得借助一些纯属于集论的命题给出一些答案,而这些命题的合理性在当时尚未得到确认.后来由于集论的发展,首先是 Gödel 证明了连续统假设与 ZFC 公理系统的相容性,然后是 Cohen 证明了连续统假设与 ZFC 公理系统的独立性,以及像 Devlin 和 Jensen 等人关于 L 的精细构造的研究,使一大批集论命题获得了独立的地位.20 世纪 60 年代以来,运用这些独立的集论命题来解答点集拓扑学提出的问题成了点集拓扑学研究的一个重要趋势,取得了丰硕成果并导致了"集论拓扑学"这一名词的出现(然而它似乎不能看成是从点集拓扑学派生出来的独立分支).点集拓扑学中许多问题在 ZFC 公理系统中往往是得不到或很难得到解答的.集论假设则是一种解决这类问题的有力工具.有时一个拓扑学问题一时在 ZFC 公理系统中找不到肯定或否定的答案,然而通过运用某个集论公理可以得出一个证明或一个反例.尽管从某种意义上说它还不算很圆满,但至少也是一个相容性的结论,它可以增强对这个问题是非判断的倾向性.拓扑学中不乏这样的事例.例如,是否存在仿紧空间其乘积是正规而非仿紧?Przymusinski 1973 年首先在 $MA+\neg CH$下给出一个反例,之后到 1980 年才给出绝对的反例.又如,人们早就知道 Suslin 线是具有 $Cal(\omega_1,\omega)$而其平方没有 $Cal(\omega_1,\omega)$的例子,后来又有了 CH 下的反例,1986 年周浩旋在$MA+\neg CH$下又作出了反例,这样人们就产生了存在绝对反例的

强烈信念.果不其然,这种反例于1993年被Watson和周浩旋得到了.再如,关于仿紧,甚至是紧空间的可数箱乘积是否正规的问题,杨守廉最近得到了一个非常漂亮的结果.而在此之前,有关这方面的正面结论全都是相容性的.可以想象,若是没有前人在各种集论假设下做的大量工作作基础,杨守廉的漂亮结果恐怕是出不来的.众多事例说明,一个从事点集拓扑学研究的人如果对这些集论工具掌握得越多,领会得越深,研究起来就越会显得左右逢源,得心应手.所以,一个攻读拓扑学专业方向的研究生不应当对集论拓扑学一无所知,至少也需要有一个初步的了解.这就是我们编写这一作为拓扑学方向高年级研究生集论拓扑学课程的入门性讲义的目的.同时,鉴于目前国内还没有出版过集论拓扑学方面的著作或教材,这本书也算是填补了一项国内的空白.

关于集论拓扑学的参考书籍,迄今见到的有三种.一种是Rudin的*Lectures on Set-theoretic Topology* (1975).一种是由Kunen和Vaughan主编,二十多位著名拓扑学家分别撰写的*Handbook of Set-Theoretic Topology* (1984,以下简称《手册》).一种是Fremlin的*Consequences of Martin's Axiom*(1984).Rudin的书是一本起过很大作用的经典之作,而Kunen和Vaughan主编的《手册》却是一部百科全书式的鸿篇巨制,Fremlin的书则是专门论述Martin公理的.它们作为入门性教材似乎都不太适宜.Rudin的讲义是由她在一个学术会议上所作的专题报告整理而成的,在条理和系统上都不太像一本教科书,再则1974年以后的许多成果未能编入,而《手册》一书就其编纂目的、材料取舍和篇幅大小而言都不能算是一本教科书.而且这两本书的一个共同点是在论证上不少地方失之简略,不便于初学者阅读.至于Fremlin的书,一则它仅限于介绍Martin公理,不够全面,再则由于作者是一位集论专家,编书时其叙述及论证方式往往遵循集论的习惯,初学者一时恐怕难以适应.最后还应指出,20世纪80年代以来,我国的拓扑学者在集论拓扑学方面也做了一些工作,由于种种原因,在这三本书中基本上都没有得到反映.所以本讲义的编写意图可以归结为以下五点:(1) 适量的篇幅;(2) 恰当的起点;(3) 一定的系统;(4) 较详的论证;(5) 尽可能反映我国学者的某些成果.

在编排上，本书没有采取像 Rudin 的书或《手册》那样按拓扑问题来分类的方法.我们是以常用的几条集论假设作为主线，围绕它们在各种拓扑学问题上的应用来展开的.我们认为这样做的好处是通过把同一集论假设的应用方法相对集中，也许能使读者便于比较，获得较深的印象，更好地领会其精神和技巧.在每一章的编排上，我们则尽可能遵循由浅入深、由简单到复杂的原则.

全书共分四章.第一章介绍连续统假设的应用，第二章介绍 Martin 公理的应用，第三章介绍弱连续统假设和 Q 集的应用，第四章介绍 Suslin 线和◇原理的应用.每一章又分为若干节，每一节大致围绕着某个拓扑问题及相近问题进行讨论.每章最后一节，对本章集论假设其他方面的应用成果及与之有关的问题的进展情况就我们所知的作一些介绍，以扩大知识面.书末列出了大约 400 篇参考文献.

阅读本书所需的预备知识，一般拓扑学方面，我们希望读者能熟悉 Engelking 的 *General Topology* 一书，另外也希望读者能读过前述《手册》中 Burke 的"Covering Properties"和 Gruenhage 的"Generalized Metric Spaces"两章.高国士的《拓扑空间论》、蒋继光的《一般拓扑学专题选讲》和林寿的《广义度量空间与映射》也是很好的参考书.王世强和杨守廉著的《独立于 ZFC 的数学问题》一书也可以参考.少数地方需要参考一些初始文献.至于集论方面，只需要一些初等知识即可（大体上相当于 Enderton 的 *Elements of Set Theory* 一书或 Kunen 的 *Set Theory – An Introduction to Independence Proofs* 第一章），不要求对 Gödel 模型和 forcing 方法有何种了解.

这本书实际上也是作者学习和从事集论拓扑学教学的一点心得.由于编者学识有限，以及作为一本入门性教学用书的编写宗旨，在材料取舍上不可能做到全面、深入，许多方面的问题都未作深入介绍，特别像 $\beta\mathrm{N}$ 研究和箱乘积研究的成果，集论公理在拓扑测度理论中的应用以及大基数公理在拓扑学中的应用，直接用 forcing 方法构造拓扑空间等都没有介绍.读者如欲在这些方面作进一步了解，需要学习更深入一些的集论知识，阅读一些专门的文献著作.

本书的撰写纳入了国家自然科学基金项目和广西壮族自治区教育

厅科研项目，它的写作和出版获得了这两个项目的支持.

最后，由于作者在集论拓扑学方面所涉不深，书中一定存在某些错谬之处，诚望读者不吝赐正. 同时也借此机会向多年来关怀、支持我的国内拓扑学界前辈和同行们表示衷心的感谢. 我特别要感谢原四川大学的周浩旋同志和我的学生及同事陈海燕与刘川同志，他们在我编写此书的过程中提供了许多资料和很多有价值的建议，同时，我也要感谢我的同学余鑫晖同志为本书的出版面世所付出的辛勤劳动.

作　者

目　　录

第一章 连续统假设及其应用

引 言

连续统假设(Continuum Hypothesis),简记为 CH,是指 $2^{\omega}=\omega^{+}=\omega_1$ 成立.广义连续统假设(Generalized Continuum Hypothesis),简记为 GCH,是指对任何基数 $\kappa\geqslant\omega$,有 $2^{\kappa}=\kappa^{+}$.这两个命题早在 Cantor 对集论开展的最初研究中就提出来了.Cantor 坚信他自己能够证明上述命题的正确性,并且好几次都自以为证出来了,然而随后又总是发现论证中出了差错.因此,它们的正确与否就成了数学中一个重大悬案.1900 年,Hilbert 在国际数学家大会上的著名讲演提出了 23 个意义深远的导向性问题,连续统假设的求证就是其中的第一个问题.后来他又拟定了一个着手解决这个问题的纲领,然而相当长的一段时间内未能取得突破性进展.1902 年,Russell 发现了著名的 Russell 悖论,给当时的数学造成了猛烈的震撼,以至一部分数学家惊呼数学出现了"危机".这也促使一部分数学家对数学的基础进行严肃的、深刻的分析与批判.1908 年,Zermelo 提出了第一个关于集论的公理系统,而后又由 Freankel 加以完善,成为今日为数学界公认的 ZF 系统.ZF 系统加上也是由 Zermelo 提出的选择公理(Axiom of Choice,简记为 AC),通称为 ZFC 系统.这样,集论开始实现了由 Cantor 时代的"朴素"集论(Naive Set Theory)向"公理"集论(Axiomatic Set Theory)的转化,其研究也更加深化了.在此基础上,Gödel 于 1937 ~ 1938 年在连续统问题上取得了第一个突破.他采用内模型方法,由一个 ZF 集论模型 **V** 出发,用一定的处理程序从 **V** 中划出一个子模型 **L**(可构成集模型),然后证明在模型 **L** 中,ZF 公理系统、AC、GCH 都能成立.这便说明,若 ZF 公理系统是相容的(consistent,或译协调的),则 ZF 加上 AC 和 GCH 也是相容的.用符号语言写出来,就是

$$\mathrm{Con\ ZF} \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZF} + \mathrm{AC} + \mathrm{GCH}).$$

又过了20多年,1964年,美国P.Cohen又以他独创的forcing方法,从一个满足ZF的可数传递模型M出发,扩张出一个满足ZF的更大的模型M[G],使得在M[G]中AC、CH不再成立.这便证明了

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZF} + \neg\ \mathrm{CH}),$$

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \neg\ \mathrm{CH}).$$

综合Gödel和Cohen的结果,可以看出,CH、GCH与ZFC是独立的(independent).换言之,CH或GCH成立与否在ZFC公理系统中是不可判定的(undeciable),即既不能证明它们正确,也不能证明它们不正确.

CH早在20世纪初到20世纪30年代就在集论和拓扑学中零零星星地得到了一些应用,波兰学者Sierepinski[1956]作了一个很好的总结.然而大量的、卓有成效的应用还是在第二次世界大战后,特别是20世纪60年代以后才出现的.本章将分十二节介绍它的一些应用情况.

§1 Lusin集和Sierepinski集

1.1.1 定义 记全体实数的集为$\mathbf{R}$,$M \subset \mathbf{R}$称为Lusin集,如果它满足:(1) $|M| > \omega$;(2) 对每个无处稠密集(nonwhere dense,简记为nwd)A,有$|A \cap M| \leqslant \omega$.

如果M满足:(1) $|M| > \omega$;(2) 对每个Lebesgue测度为零的集(零测度集)A,有$|A \cap M| \leqslant \omega$,则称$M$为Sierepinski集. □

1.1.2 定理(CH) $\mathbf{R}$中存在Lusin集和Sierepinski集.

证明 为了证明Lusin集存在,只需造出一个不可数集M,它与每个闭的无处稠密集(简记为cnwd)A有$|A \cap M| \leqslant \omega$即可.

因为$\mathbf{R}$中cnwd的全体有势2^{ω},由CH,我们可以把它们排列成$\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.注意$\mathbf{R}$是Baire空间(实际上它是完备度量空间),而对每个$\alpha < \omega_1$,$B_\alpha = \bigcup\{A_\xi : \xi < \alpha\}$是一个meager集,即可数个nwd集之并,所以$\mathbf{R} - B_\alpha$是不可数的.于是我们可以归纳地作出$M = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$如下:任取$x_0 \in \mathbf{R} - A_0$,设$\forall\, \xi < \alpha$,$x_\xi$已经选出,使$x_\xi \notin B_\xi$.这时取$x_\alpha \in \mathbf{R} - B_\alpha - \{x_\xi : \xi < \alpha\}$,则$M$就是一个Lusin集.

要证 Sierepinski 集的存在性，只需注意，由 Lebesgue 测度的正则性，每个零测度集都被包含在一个测度为零的 G_δ 集内. 而 $\mathbf{R}$ 中这样的 G_δ 集刚好有 2^ω 个. 将它们排列成 $\{E_\alpha : \alpha < \omega_1\}$，再按上述方法就可以作出一个 Sierepinski 集. □

下面我们介绍 Rothberger 定理. 它给出了一个与 CH 等价的命题. 为此先证明一个引理.

1.1.3 引理 若 $X \subset \mathbf{R}$ 不是一个 meager 集(零测度集)，而 $|X| = \kappa$，则 $\mathbf{R}$ 是 κ 个零测度集(meager 集)之并.

证明 设 G 是一个测度为 0 的余 meager 集. 若存在 y，对每个 $x \in X$，$y \notin \{x + G : x \in X\}$，即 $x \notin y - G$，则 $X \cap (y - G) = \varnothing$. 因为 $y - G$ 仍是一个余 meager 集，所以 X 是 meager 集. 这与引理的假设矛盾，于是有 $\mathbf{R} = \bigcup\{x + G : x \in X\}$，而每个 $x + G$ 都是零测度集.

设 G 是一个其余集测度为零的 meager 集，类似的论证可得 $\mathbf{R} = \bigcup\{y + G : y \in X\}$，其中每个 $y + G$ 都是 meager 集.

因此，论证的关键转化为具有上述性质的集 G 的存在性. 我们先从 $[0,1]$ 区间作出一个集 C. 对每个 $n \in \mathbf{N}$($\mathbf{N}$ 是全体自然数的集)，我们作 C_n. 其作法与作Cantor集相仿. 第 1 步，从 $[0,1]$ 中取出一个以 $[0,1]$ 中点为中心，长为 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$ 的开区间……第 k 步，从余下的 2^k 个闭区间中取出一个以区间中点为中心，长为 $\frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{n}$ 的开区间. 记所有这些开区间之并为 E_n，则 E_n 是 $I = [0,1]$ 的一个开稠密集. $m(E_n) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$. 记 $C_n = I - E_n$，则 C_n 是 cnwd，并且 $m(C_n) = 1 - \frac{1}{n}$. 现在令 $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$，则 C 是 meager 集，而 $m(C) = 1$. 最后令 $A = \bigcup\{n + C : n \in \mathbf{Z}\}$. A 是 $\mathbf{R}$ 中的 meager 集，$m(\mathbf{R} - A) = 0$. A 或 $\mathbf{R} - A$ 即为我们所要的 G. □

1.1.4 定理 设 X, Y 分别是 $\mathbf{R}$ 中的 Lusin 集和 Sierepinski 集，则 $|X| = |Y| = \omega_1$. (Rothberger, 1938)

证明 因为 Lusin 集的任何不可数子集仍是 Lusin 集，所以可取 $X_0 \subset X$，使 $|X_0| = \omega_1$. 由引理 1.1.3，$\mathbf{R}$ 是 ω_1 个零测度集之并. 设 $\mathbf{R} = \bigcup\{E_\alpha : \alpha < \omega_1\}$，其中 $m(E_\alpha) = 0$，则 $Y = \bigcup\{Y \cap E_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. 因为每个 α 有 $|Y \cap E_\alpha| \leqslant \omega$，所以 $|Y| = \omega_1$. 再次应用引理 1.1.3 就可以推出 $|X| = \omega_1$. □

1.1.5 推论

$$\mathrm{CH} = [\exists \text{ Lusin 集 } X \subset \mathbf{R}] \wedge [\exists \text{ Sierepinski 集 } Y \subset \mathbf{R}] \wedge [(|X| = 2^\omega) \vee (|Y| = 2^\omega)].$$ □

从 1.1.2 的证明可以看出，在 CH 下，Lusin 集和 Sierepinski 集的存在性并不是 $\mathbf{R}$ 的专有品. 实际上这两种集可以在更广泛的拓扑空间中找到.

1.1.6 定义 1. 设 X 是一个拓扑空间，$M \subset X$. 如果 $|M| > \omega$，并且对每个 nwd 集 $A \subset X$，有 $|A \cap M| \leqslant \omega$，就称 M 为 X 中的一个 Lusin 集.

2. 设 X 是一个测度空间，$M \subset X$. 如果 $|M| > \omega$，并且对每个零测度集 $E \subset X$，有 $|E \cap M| \leqslant \omega$，就称 M 为 X 中的一个 Sierepinski 集. □

利用 1.1.2 中的论证方法可以证明下面的定理 1.1.7 和定理 1.1.8.

1.1.7 定理 若 X 是一个没有孤立点的 Baire 空间，并且存在一个由 cnwd 集组成的、势 $\leqslant 2^\omega$ 的集族 $\mathscr{A}$，使得对每个 nwd 集 S，都有 $A \in \mathscr{A}$，使 $S \subset A$，则 CH$\Rightarrow X$ 有 Lusin 集. □

1.1.8 定理 若 X 是一个拓扑空间，m 是 X 上一个正则 Borel 测度，使得 $m(X) > 0$，而对每个 $x \in X$，有 $m(\{x\}) = 0$. 如果 X 只有 2^ω 个开集，则 CH$\Rightarrow X$ 有 Sierepinski 集.

特别地，若权 $w(X) \leqslant 2^\omega$，X 是遗传 Lindelöf 空间，则 CH$\Rightarrow X$ 有 Sierepinski 集.

证明 我们来证明 $w(X) \leqslant 2^\omega$，X 是遗传 Lindelöf 空间的情形. 设 E 是一个零测度集，由正则性，存在开集序列 $\{G_n : n \in \mathbf{N}\}$，使 $E \subset G_n$，$m(G_n) < \frac{1}{n}$. 设 $\mathscr{B}$ 是一个势 $\leqslant c\,(=2^\omega)$ 的基. 对每个 n，$\{U \in \mathscr{B}: U \subset G_n\}$ 是 E 的一个开覆盖. 由假设存在 $\mathscr{U}_n(E) \in [\mathscr{B}]^\omega$，使 $E \subset \bigcup \mathscr{U}_n(E)$

$\subset G_n$. 于是 $E\subset\bigcap\limits_n(\bigcup\mathscr{U}_n(E))=A(E)$. 其中 $A(E)$是 G_δ 集, $m(A(E))=0$. 但这种形式的测度为零的 G_δ 集不会超过 2^ω 个. 这是因为 $\{\mathscr{U}_n(E):n\in\mathbf{N}\}\in[[\mathscr{B}]^\omega]^\omega$. 而 $|[[\mathscr{B}]^\omega]^\omega|\leqslant(c^\omega)^\omega=2^\omega=c$. □

1.1.9 定义 设 X 是一个拓扑空间. X 中的开集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的一个 π 基, 如果对 X 的每个不空开集 G, 存在 $B\in\mathscr{B}$, 使 $B\neq\varnothing$, $B\subset G$.

$$\pi(X)=\omega\cdot\min\{|\mathscr{B}|:\mathscr{B}\text{是 }X\text{ 的 }\pi\text{ 基}\}$$

称为 X 的 π 权. □

每个基都是 π 基, 所以一般地有 $\pi(X)\leqslant w(X)$, 但 π 基不一定是基. 比如设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个基, $A\subset X$ 是任一个 cnwd, 则 $\{B-A:B\in\mathscr{B}\}$ 是一个 π 基但不是 X 的基. 再者, 若 $\mathscr{B}$ 是一个 π 基, f 是 $\mathscr{B}$ 的任一选择函数(即 $f:\mathscr{B}\to X$, $\forall B\in\mathscr{B}$, $f(B)\in B$), 则 $\operatorname{ran}f$ 是 X 的一个稠密集. 故 $d(X)\leqslant\pi(X)$, 即 X 的稠密度 $\leqslant X$ 的 π 权. 另外也容易看出 $\pi(X)\leqslant\chi(X)\cdot d(X)$. 而 Sorgenfrey 线 S 则是满足 $\pi(S)=\chi(S)\cdot d(S)=\omega<w(S)=c$ 的例子.

1.1.10 定理(CH) 若 X 是一个不可数的, 自密的 CCC, Baire 空间, 并且 $\pi(X)\leqslant 2^\omega$, 则 X 有 Lusin 集, 而且还可以作出一个稠密的 Lusin 集.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个 π 基, $|\mathscr{B}|\leqslant 2^\omega$. 又设 A 是 X 的一个 cnwd. 记 $\mathscr{B}(A)=\{B\in\mathscr{B}:B\cap A=\varnothing\}$. 取 $\mathscr{B}(A)$ 的一个极大互斥族 $\mathscr{U}(A)$, 则 $A\subset X-\bigcup\mathscr{U}(A)$. 由 $\mathscr{U}(A)$ 的极大性知 $X-\bigcup\mathscr{U}(A)$ 是 cnwd. X 满足 CCC, 故有 $|\mathscr{U}(A)|\leqslant\omega$. 所以, 形如 $X-\bigcup\mathscr{U}(A)$ 的集不超过 $(2^\omega)^\omega=2^\omega$ 个. 由定理 1.1.7, X 有 Lusin 集.

如果要求作出一个稠密的 Lusin 集, 可以按如下方法实现. 记 $\mathscr{B}=\{B_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 又记 $\{X-\bigcup\mathscr{U}:\mathscr{U}\subset\mathscr{B}\text{是极大互斥族}\}=\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 当 $\alpha=0$ 时, 取 $x_0\in B_0$. $\alpha>0$ 时, 取 $x_\alpha\in B_\alpha-\bigcup\{A_\xi:\xi<\alpha\}-\{x_\xi:\xi<\alpha\}$. 令 $M=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$, 则 M 是稠密的 Lusin 集, 注意 B_α 是 Baire 的, 而 $\bigcup\{A_\xi:\xi<\alpha\}\cup\{x_\xi:\xi<\alpha\}$ 是 meager 集. 它们的差不空, 所以上述归纳步骤是可行的. □

1.1.11 推论(CH) 设 X 是第一可数, 自密的 CCC, Baire, T_2 空

间.若$|X|>\omega$,则X有稠密的Lusin子空间.

证明 由已知的基数不等式$|X|\leqslant 2^{\chi(X)c(X)}$(参看Hodel[1984]的4.7),可知$|X|\leqslant 2^{\omega}$,于是$\pi(X)\leqslant w(X)\leqslant |X|\cdot\chi(X)=2^{\omega}$.再由定理1.1.10即得. □

在定理1.1.2中,我们证明了CH⇒$\mathbf{R}$中存在Lusin集和Sierepinski集.通过更为细致的技巧,还可以进一步使作出的集关于加法构成一个子群.

***1.1.12 定理(CH)** (i) 存在$\mathbf{R}$的一个Sierepinski集Y,使$(Y,+)$是一个群,并且Y关于区间拓扑是一个meager集.

(ii) 存在$\mathbf{R}$的一个Lusin集X,使$(X,+)$是一个群.

证明 取$\mathbf{R}$的一个子集Z,使得$0\in Z$,Z是$\mathbf{R}$中的稠密G_δ集,并且$m(Z)=0$.(记$\mathbf{R}$的全体有理数集为$\mathbf{Q}$,则$m(\mathbf{Q})=0$.由Lebesgue测度的正则性,存在G_δ集M使$\mathbf{Q}\subset M$,并且$m(M)=0$.令$Z=M-\{0\}$即可.)记$\{F_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是$\mathbf{R}$中全体测度为零的Borel集的集,并假定$F_0=Z$,令$Y_0=\{0\}$,假设对每个$\beta<\alpha,\alpha<\omega_1$,我们已定义了$Y_\beta$,满足如下的条件:

(1) $Y_\beta\in[\mathbf{R}]^{\omega}$.

(2) $(Y_\beta-\bigcup_{\xi<\beta}Y_\xi)\cap(\bigcup_{\xi<\beta}F_\xi)=\varnothing$.

(3) $y\in Y_\beta\Rightarrow -y\in Y_\beta$,并且$\forall q\in\mathbf{Q}$,有$qy\in Y_\beta$.

记$Z^\alpha=\bigcup\{qF_\beta+y:q\in\mathbf{Q},\beta<\alpha,y\in\bigcup_{\xi<\beta}Y_\xi\}$(其中$qF_\beta+y=\{qx+y:x\in F_\beta\}$).易见$m(Z^\alpha)=0$.任取$h_\alpha\in\mathbf{R}-Z^\alpha$,令$Y_\alpha=\{qh_\alpha+y:q\in\mathbf{Q},y\in\bigcup_{\beta<\alpha}Y_\beta\}$.显然有$Y_\alpha\in[\mathbf{R}]^{\omega}$.今证$(Y_\alpha-\bigcup_{\xi<\alpha}Y_\xi)\cap(\bigcup_{\xi<\alpha}F_\xi)=\varnothing$.如若不然,假设它含有点$x$,则存在$\beta<\alpha$使$x\in F_\beta$,又存在$q\in\mathbf{Q}$和$y\in\bigcup_{\xi<\alpha}Y_\xi$,使$x=qh_\alpha+y$.因为$x\notin\bigcup_{\xi<\alpha}Y_\xi$,故$q\neq 0$.于是$h_\alpha=\frac{1}{q}x-\frac{1}{q}y\in\frac{1}{q}(F_\beta+(-y))\subset Z^\alpha$.这与$h_\alpha$的取法矛盾.由$Y_\alpha$的定义,易见条件(3)也是满足的.这样对所有的$\alpha<\omega_1$,都定义了满足归纳条件(1)~(3)的$Y_\alpha$.

令 $Y=\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha$,则(1) Y 是域 $\mathbf{Q}$ 上的一个线性空间,因而是一个加法群.(2) 因为 $Y=\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1}(Y_\alpha-\bigcup\limits_{\beta<\alpha}Y_\beta)$,又 $F_0=Z$,所以 $Y\cap Z=\varnothing$.(3) 对每个零测度集 E,存在 α 使 $E\subset F_\alpha$.这时 $Y\cap E\subset F_\alpha\cap Y\subset(\bigcup\limits_{\beta<\alpha}Y_\beta)\cap F_\alpha$.故 $|Y\cap E|\leqslant\omega$.所以 Y 是 Sierepinski 集.(4) 因为 Z 是稠密的 G_δ 集,$Y\subset\mathbf{R}-Z$,故 Y 是 meager 集.

在上述论证中,若取 $\{F_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 为全体 F_σ 型 meager 集的一个排列.令 $X_0=\{0\}$.按同样的归纳步骤进行,在第 α 步时,注意 Z^α 仍是一个 meager 集,故 $\mathbf{R}-Z^\alpha\neq\varnothing$.存在 $h_\alpha\in\mathbf{R}-Z^\alpha$.令 $X_\alpha=\{qh_\alpha+x:q\in\mathbf{Q},x\in\bigcup\limits_{\beta<\alpha}X_\beta\}$,$X=\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1}X_\alpha$.则 X 即为所求的 Lusin 集. □

§2 用 Lusin 集构造 L 空间

1.2.1 定义 正则,遗传 Lindelöf 但不是(遗传)可分的空间称为 L 空间.正则,遗传可分但不是(遗传)Lindelöf 的空间称为 S 空间. □

下面的例子说明在 ZFC 中存在遗传 Lindelöf,不可分的 T_2 空间和遗传可分,非 Lindelöf 的 T_2 空间.

例如,在 $\mathbf{R}$ 中任取一个势为 ω_1 的子集 $X=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$.记 τ 为 X 作为 $\mathbf{R}$ 的子空间所继承的拓扑.定义

τ_L 为 X 的由 $\tau\cup\{\{x_\xi:\xi>\alpha\}:\alpha<\omega_1\}$ 生成的拓扑.

τ_S 为 X 的由 $\tau\cup\{\{x_\xi:\xi<\alpha\}:\alpha<\omega_1\}$ 生成的拓扑.

则 (X,τ_L) 与 (X,τ_S) 是两个 T_2 空间.因为 τ 是遗传 Lindelöf 和遗传可分的,而每个形如 $\{x_\xi:\xi>\alpha\}$ 的集的余集是可数的,所以不难验证 (X,τ_L) 是遗传 Lindelöf 空间而 (X,τ_S) 是遗传可分空间.然而 (X,τ_L) 却不是可分的;(X,τ_S) 不是 Lindelöf 的.

至于在正则条件下这种空间,即 L 空间或 S 空间的存在与否,则是一个十分困难的问题.事实表明,不借助一定的集论假设和精巧的集论技术,要回答这个问题几乎是不可能的.早在 1935 年,南斯拉夫的 Kurepa 曾经指出,若存在 Suslin 线,则由它可以作出一个紧的,无处可

分的 L 空间(Kurepa[1935]).现在已经知道,Suslin 线的存在与否是与 ZFC 独立的(参看第四章§1第一段).1972 年和 1974 年,Rudin 用 Suslin 线又作出了正规或非正规的 S 空间(Rudin[1972],[1974]).1972 年匈牙利的 Hajnal 和 Juhasz 提出了 HFD 和 HFC 的概念,并由它们作出了 0 维的 L 空间和 S 空间.1974 年他们证明了 HFD 和 HFC 的存在性可以由 CH 推出.此后,很多新的 L 空间与 S 空间先后被构造出来.另一方面,在承认 Martin 公理和$\neg$ CH 的情况下,许多类型的 S 空间和 L 空间的存在性都被排除.1981 年,南斯拉夫的 Todocevic[1981]证明了 Con(ZFC + $\neg\ \exists S$空间),明确宣告了 S 空间存在性与 ZFC 独立.至于关于 L 空间的类似结果迄今尚未得到.就是说,我们迄今还不知道在 ZFC 中究竟能否存在 L 空间.

这一节我们将介绍 van Douwen, Tall, Weiss[1977]利用 Lusin 集以及 Pixley-Roy 空间技巧构造 L 空间的结果.其他一些 L 空间与 S 空间的构造方法还将在后面一些地方提及.

1.2.2 定义 设(X,τ)是一个拓扑空间.$\mathscr{E}\subset\mathscr{P}(X)-\{\varnothing\}$是一个对有限并运算封闭的非空子集族.对任意 $E\in\mathscr{E}$和 $G\in\tau$,当满足 $E\subset G$ 时,记$[E,G]=\{A\in\mathscr{E}:E\subset A\subset G\}$.以$\{[E,G]:E\in\mathscr{E},G\in\tau,E\subset G\}$为基生成 $\mathscr{E}$的一个拓扑,称为 $\mathscr{E}$的 Pixley-Roy 拓扑,简称为 P-R 拓扑.$\mathscr{E}$赋以这个拓扑所成的空间记为 $\mathscr{E}[X]$.关于 P-R 拓扑的一般性讨论可参看 van Douwen[1977]或 Lutzer[1978]. □

1.2.3 命题 若 X 是 T_1 空间,则 $\mathscr{E}[X]$是 0 维 T_1 空间,从而是完全正则的.(van Douwen)

证明 设 $F\in\mathscr{E}$,而 $F\notin[E,G]$,则 $E-F\neq\varnothing$或 $F-G\neq\varnothing$.若 $E-F\neq\varnothing$.取 $e\in E-F$,则 $U=X-\{e\}\in\tau$,而$[F,U]\cap[E,G]=\varnothing$.若 $F-G\neq\varnothing$,则对任何 $A\in\mathscr{E}$,$F\subset A$,都有 $A-G\neq\varnothing$.所以$[F,X]\cap[E,G]=\varnothing$.这表明$[E,G]$恒为闭集.又 $E\neq F$ 时,像前面的论证一样,可以断定,或者 $E\notin[F,U]$或者 $E\notin[F,X]$.总之,$\{F\in\mathscr{E}:F\neq E\}$是个开集.于是 $\mathscr{E}[X]$是 0 维 T_1 空间. □

不难证明,当 $\mathscr{F}=[X]^{<\omega}$(即 $\mathscr{F}$是 X 的全体有限子集的集)时,$\mathscr{F}[X]$是一个亚紧空间.若 X 是第一可数的,则 $\mathscr{F}[X]$是亚紧 Moore 空间.

1.2.4 命题 设 $M\subset X$ 是一个 Lusin 集,又设 X 的孤立点不超过 ω 个,则 M 是遗传 Lindelöf 空间.(Kunen)

证明 由于 Lusin 集的任何一个不可数子集还是 Lusin 集,故只需证明任何 Lusin 集是 Lindelöf 的.设 $A\subset M$ 是子空间 M 中的一个 nwd 集.这时 A 也是空间 X 中的 nwd 集.如若不然,则存在开集 $G\neq\varnothing$,使 $G\subset \mathrm{Cl}_X A$.于是 $\mathrm{Cl}_M A=\mathrm{Cl}_X A\cap M\supset G\cap M\supset G\cap A\neq\varnothing$,即 $\mathrm{Int}_M\mathrm{Cl}_M A\neq\varnothing$,矛盾.下面证明 M 是$\aleph_1$紧的.假若 M 有一个不可数的闭离散子集 A,因为 X 的孤立点不超过ω 个,不失普遍性,可以假定 A 不含 X 的孤立点.这时,集 A 就是 X 中的一个 nwd 集,$|A|>\omega$,与 M 是 Lusin 集矛盾.因此 M 是$\aleph_1$紧的,从而 M 也是遗传$\aleph_1$紧,即遗传 CCC 空间.现在设 $\mathscr{U}$ 是 M 的一个开覆盖,M 是 CCC 的,存在 $\mathscr{U}$ 的可数子族 $\{U_n:n<\omega\}$,使 $\bigcup_n U_n$ 是 M 的开稠密集,$M-\bigcup_n U_n=A$ 是 M 中的 cnwd 集,从而也是 X 中的 nwd 集.由于 M 是 Lusin 集,有 $|A|\leqslant\omega$.于是 $\mathscr{U}$ 有可数子覆盖.M 是 Lindelöf 的. □

1.2.5 命题 若 X 是不可分,第一可数,自密,CCC,正则的 Baire 空间,则它的稠密 Lusin 子空间就是一个 L 空间.

证明 设 M 是 X 的稠密 Lusin 子空间.由命题 1.2.4,M 是遗传 Lindelöf 的.X 不可分而 M 在 X 中稠密,所以 M 也是不可分的. □

从上述的 1.2.5 和 1.1.11,我们可以知道,为了作出一个 L 空间,关键是要找出一个不可分的,第一可数,CCC,自密的 Baire 空间.为此先给出一个引理.

1.2.6 引理 设 X 是一个拓扑空间,如果存在一个由闭集族构成的序列 $\{\mathscr{F}_n:n<\omega\}$,满足

(i) 对每个 $x\in X$ 和 x 的邻域 U,对每个 n,存在 $F_n\in\mathscr{F}_n$,使得 $x\in F_n^\circ\subset F_n\subset U$(此处 $F_n^\circ=\mathrm{Int}_X F_n$).

(ii) 若 $\mathscr{A}\subset\bigcup_n\mathscr{F}_n$ 有 fip(fintite intersection property,有限交性质,即任意有限个元之交不空),并且对每个 n,有 $\mathscr{A}\cap\mathscr{F}_n\neq\varnothing$,则 $\bigcap\mathscr{A}\neq\varnothing$.

则 X 是 Baire 空间.

证明 设 $\{G_n:n<\omega\}$ 是 X 的一个开稠密集序列,U 是一个不空的开集.G_1 是稠密的,故存在 $x\in U\cap G_1$.由条件(1),存在 $F_1\in\mathscr{F}_1$,使 x

$\in F_1^\circ \subset F_1 \subset U \cap G_1$. 由 $F_1^\circ \cap G_2 \neq \varnothing$,类似地可以找到 $F_2 \in \mathscr{F}_2$,使 $F_2^\circ \subset F_1^\circ \cap G_2$. 归纳地作下去,可以得到一个序列 $\{F_n : n < \omega\}$,满足 $F_n \in \mathscr{F}_n$, $F^\circ_{n+1} \subset F_n^\circ \cap G_{n+1} \subset U$, $\mathscr{A} = \{F_n : n < \omega\}$ 满足条件(2),故 $U \cap (\bigcap_n G_n) \supset \bigcap \mathscr{A} \neq \varnothing$. 所以 $\bigcap_n G_n$ 是稠密集. □

现在给出 van Douwen, Tall 与 Weiss 的结果.

1.2.7 定理(CH) 存在一个 0 维的、第一可数的 L 空间.

证明 设 $\mathscr{K}$ 是 $\mathbf{R}$ 中全体紧 nwd 集的集,赋以 P-R 拓扑,则 $\mathscr{K}$ 具有如下性质.

(1) 第一可数性. 设 $K \in \mathscr{K}$,令 $G_n = \left\{x : d(x, K) < \frac{1}{n}\right\}$,则 $\{[K, G_n] : n < \omega\}$ 就是 K 的一个局部基,这是因为对任何包含 K 的 $\mathbf{R}$ 中的开集 G,总存在 n,使 $G_n \subset G$,从而 $[K, G_n] \subset [K, G]$.

(2) CCC 性. 集族 $\mathscr{B} = \bigcup_n \mathscr{B}_n$ 称为 σ-定心的(σ-centred),如果每个 $\mathscr{B}_n$ 都有 fip. 现在设 $\mathscr{W} = \{W_n : n < \omega\}$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个可数基,它对有限并运算封闭,这时对每个 $K \in \mathscr{K}$ 和开集 G, $K \subset G$,存在 n,使 $K \subset W_n \subset G$. 于是 $[K, W_n] \subset [K, G]$. 记 $\mathscr{B}_n = \{[K, W_n] : K \in \mathscr{K}, K \subset W_n\}$, $\mathscr{B} = \bigcup_n \mathscr{B}_n$. 显然 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{K}$ 的一个基,而且是一个 σ-定心基. 因为若 $[K_1, W_n], \cdots, [K_m, W_n] \in \mathscr{B}_n$,则 $[K_1 \cup \cdots \cup K_m, W_n] = \bigcap_{i=1}^{m} [K_i, W_n]$ 是不空的. 然而有 σ-定心基的空间必定是 CCC 空间.

(3) 自密性. 设 $K \in \mathscr{K}$, $[K, G]$ 是 K 的任一邻域,则 $G - K \neq \varnothing$. 任取 $x \in G - K$,则 $K_1 = K \cup \{x\} \in \mathscr{K}$, $K_1 \in [K, G]$. 所以 K 不是孤立点.

(4) Baire 性. 我们来验证 $\mathscr{K}$ 满足引理 1.2.6 的条件. 取 $\mathbf{R}$ 中一个对有限并运算封闭的可数基 $\mathscr{W} = \{W_n : n < \omega\}$,令 $\mathscr{F}_n = \{[K, F] : K \in \mathscr{K}$, F 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集,使 $K \subset F^\circ, W_n \not\subset F\}$. 容易验证每个 $\mathscr{F}_n$ 都是 $\mathscr{K}$ 中的闭集族. 现在设 $[K, G]$ 是 K 的任一邻域,因为 K 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集,存在 $\mathbf{R}$ 中的有界开集 V,使 $K \subset V \subset V^- \subset G$. 对每个 n,因为 $K^\circ = \varnothing$,存在 $x \in W_n - K$. 注意 $d(x, K) > 0$,因此存在 $\varepsilon > 0$,使 $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap K = \varnothing$. 令 $F = V^- - (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. 易见 F 是一个紧集,并且 $K \subset F^\circ \subset F \subset V^- \subset G$, $W_n \not\subset F$. 于是 $[K, F] \in \mathscr{F}_n$. 由 $[K, F] \subset [K, G]$, $K \in [K, F^\circ] \subset$

$[K,F]^\circ$,可知条件(1)满足.其次,设 $\mathscr{A}=\{[K_i,F_i]:i\in I\}\subset\bigcup_n\mathscr{F}_n$ 是一个有 fip 的集族,并且对每个 n 有 $\mathscr{A}\cap\mathscr{F}_n\neq\varnothing$.令 $F=\bigcap_i F_i$,注意 $[K_i,F_i]\cap[K_j,F_j]=[K_i\cup K_j,F_i\cap F_j]$,可见 $\{F_i:i\in I\}$ 也有 fip.于是 $\bigcap_i F_i=F$ 是不空的紧集.但是对任何 n,存在 i_n 使 $[K_{i_n},F_{i_n}]\in\mathscr{F}_n$,所以 $W_n-F\supset W_n-F_{i_n}\neq\varnothing$.由此推知 F 是 cnwd 集,即 $F\in\mathscr{K}$,于是条件(2)也满足.

(5) 无处可分性.我们来证明任何 $[K,G]$ 都没有可数稠密集.假设 $\mathscr{D}$ 是 $[K,G]$ 的一个稠密子集.对每个 $x\in G-K$,有 $[K\cup\{x\},G]\subset[K,G]$,于是存在 $D\in\mathscr{D}$,使 $D\in[K\cup\{x\},G]$,即 $x\in D\subset G$,这说明 $G=\bigcup\mathscr{D}$,但 D 是 $\mathbf{R}$ 中的 cnwd 集而 G 是 $\mathbf{R}$ 中的开集,故 $\mathscr{D}$ 的势是不可数的.

这样,根据推论 1.1.11 和命题 1.2.5,$\mathscr{K}$ 包含一个稠密的 L 空间.

□

附带地说,空间 $\mathscr{K}$ 还是次可度量的(Submetrizable),从而有正则 G_δ 对角线,而且它还容许一个比它粗的可分度量拓扑.故 $\mathscr{K}$ 有可数的分离开覆盖.$\mathscr{K}$ 不是 Moore 空间,否则,在 CH 下,$\mathscr{K}$ 的稠密 Lusin 子空间是 Lindelöf 的 Moore 空间,因而是可分的,这将得出矛盾.

注: P-R 拓扑是 Pixley 和 Roy 1969 年在研究 Moore 空间完备化问题时为构造反例提出来的(见[1969]).它实际上可以看做是从一个已知的拓扑空间按照某种程序产生出一个新的拓扑空间的手段.这种程序或手段,拓扑学界往往称之为"机器"(machine).通过 Pixley-Roy 程序产生的拓扑空间 $\mathscr{E}[X]$ 的性质既取决于原来的空间 X 的拓扑结构,同时也取决于 X 的子集族 $\mathscr{E}$ 的选择,因而具有很大的灵活性,不失为构造各种反例的良好工具.

§3 用 Sierepinski 集构造 L 空间及平方不是 Baire 空间的 Baire 空间

这一节我们主要讨论 $\mathbf{R}$ 中的 Sierepinski 集在构造拓扑学中的反例

中的应用.先介绍 Tall[1976]的结果,然后介绍 White Jr.[1975]的结果.作为预备知识,我们先给出关于 $\mathbf{R}$ 上 Lebesgue 测度的若干结论和 $\mathbf{R}$ 上的密度拓扑及某些性质.

设 m 是 $\mathbf{R}$ 上的 Lebesgue 测度. $\mathscr{M}$ 是全体 L 可测集的 σ 代数.设 $A,B\in\mathscr{M}$.规定 $A\sim B$ 当且仅当 $m(A\Delta B)=0$(Δ 是对称差运算, $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$).设 $E\in\mathscr{M}$, $x\in\mathbf{R}$,记

$$d_E(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}m(E\cap[x-h,x+h]),$$

$d_E(x)$称为 E 在点 x 处的密度,又记 $\varphi(E)=\{x:d_E(x)=1\}$.

1.3.1 定理(Lebesgue 密度定理) 若 $E\in\mathscr{M}$,则 $\varphi(E)\sim E$.

证明 分两种情况证明.

(1) E 是有界集.先证 $m(E-\varphi(E))=0$.对任意 $\varepsilon>0$,记

$$A_\varepsilon=\left\{d\in E:\operatorname*{lim\,Inf}_{h\to 0}\frac{m(E\cap[x-h,x+h])}{2h}<1-\varepsilon\right\},$$

则 $E-\varphi(E)=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{\frac{1}{k}}$.所以只需证明对任何 $\varepsilon>0$,有 $m^*(A_\varepsilon)=0$ 即可.为了方便,我们省略下标,记 $A=A_\varepsilon$.假若 $m^*(A)>0$,则存在有界开集 G,使 $A\subset G$,而 $m(G)<\frac{1}{1-\varepsilon}m^*(A)$.记

$$\mathscr{E}=\{I:I\subset G\text{ 是闭区间,满足 }m(E\cap I)\leqslant(1-\varepsilon)m(E)\}.$$

当 $x\in A$ 时,由 A_ε 的定义,存在有包含点 x 的,长度任意小的,属于 $\mathscr{E}$ 的区间.另外,若$\{I_n:n<\omega\}$是 $\mathscr{E}$中任意一个互不相交的闭区间序列,则有

$$\begin{aligned}m^*(A\cap(\bigcup_n I_n))&\leqslant\sum_n m^*(A\cap I_n)\leqslant\sum_n m^*(E\cap I_n)\\&\leqslant(1-\varepsilon)\sum_n m(I_n)\leqslant(1-\varepsilon)m(G)<m^*(A).\end{aligned}$$

所以, $m^*(A-\bigcup_n I_n)\geqslant m^*(A)-m^*(A\cap(\bigcup_n I_n))>0$.

现在,归纳地构造$\{I_n:n<\omega\}$如下.任取 $I_1\in\mathscr{E}$,假设 $I_1,\cdots,I_n$ 已经选好,令

$$\mathscr{E}_n=\{I\in\mathscr{E}:I\cap(\bigcup_{j=1}^{n}I_j)=\varnothing\},$$
$$d_n=\operatorname{Sup}\{m(I):I\in\mathscr{E}_n\}.$$

从 $\mathscr{E}_n$ 中选一个 I_{n+1}，使 $m(I_{n+1}) > \frac{1}{2}d_n$，归纳完毕.

令 $B = A - \bigcup_n I_n$，则 $m^*(B) > 0$，于是存在 n_0，使 $\sum_{j>n_0} m(I_j) < \frac{1}{3}m^*(B)$. 令 J_n 是与 I_n 共中心而长度为 $3m(I_n)$ 的闭区间，由上述不等式可知，$\{J_n : n > n_0\}$ 不可能覆盖 B，于是存在点 $x \in B - \bigcup_{n>n_0} J_n$. 但是点 $x \in A - \bigcup_n J_n$，所以存在区间 $I \in \mathscr{E}$，使 x 是 I 的中心. 这时 I 必定与某个 $I_n(n > n_0)$ 相交，否则由 $m(I_n) \leqslant d_n < 2m(I_{n+1})$ 对每个 n 都成立，就会得到 $\sum_{n>n_0} m(I_{n+1})$ 发散的结论，与 $m(G) < \infty$ 矛盾. 设 n 是使 $I_n \cap I \neq \varnothing$ 的最小的自然数，则 $n > n_0$，并且 $I \cap I_{n-1} = \varnothing$，于是 $I \in \mathscr{E}_{n-1}$，$m(I) \leqslant d_{n-1} < 2m(I_n)$. 这样有 $x \in J_n$，与 $x \notin \bigcup_{n>n_0} J_n$ 矛盾，这就证明了 $m^*(A) = 0$，从而 $m(E - \varphi(E)) = 0$.

另一方面，取一个包含 E 的开区间 I，令 $F = I - E$，易见当 $x \in I$ 时，$x \in \varphi(E)$ 当且仅当 $x \notin \varphi(F)$. 前面已经证明 $m^*(F - \varphi(F)) = 0$. 因为 $\varphi(E) - E \subset (I - \varphi(F)) - E = F - \varphi(F)$，于是也有 $m^*(\varphi(E) - E) = 0$. 由此即得 $m(E\Delta\varphi(E)) = 0$，即 $E \sim \varphi(E)$.

(2) E 是无界集. 取一个单调上升的有界集序列 $\{E_n : n < \omega\}$，使 $E_n \uparrow E$. 这时 $\varphi(E_n) \uparrow \varphi(E)$. 由 $E_n - \varphi(E) \subset E_n - \varphi(E_n)$，得出 $m(E - \varphi(E)) = \lim_n m(E_n - \varphi(E)) = 0$. 类似地有 $m(\varphi(E) - E) = 0$. 于是有 $E \sim \varphi(E)$. □

1.3.2 定理 映射 $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 具有如下性质：

(1) $\varphi(\varnothing) = \varnothing$，$\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

(2) $\varphi(E) \sim E$，从而 $E \sim F \Leftrightarrow \varphi(E) \sim \varphi(F)$.

(3) $E \subset F \Rightarrow \varphi(E) \subset \varphi(F)$.

(4) $\varphi(E \cap F) = \varphi(E) \cap \varphi(F)$.

证明 (1)、(2)、(3)是明显的，我们来证明(4). 注意对任何一个区间 I，有 $I - (E \cap F) = (I - E) \cup (I - F)$，于是 $m(I) - m(I \cap E \cap F) \leqslant m(I - E) + m(I - F) = m(I) - m(I \cap E) + m(I) - m(I \cap F)$. 整理上式，得

$$\frac{m(I\cap E)}{m(I)}+\frac{m(I\cap F)}{m(I)}\leqslant 1+\frac{m(I\cap E\cap F)}{m(I)}.$$

由此推出，若 $x\in\varphi(E)\cap\varphi(F)$，则 $x\in\varphi(E\cap F)$，即

$$\varphi(E)\cap\varphi(F)\subset\varphi(E\cap F).$$

□

现在，我们定义 $\mathscr{T}=\{E:E\subset\varphi(E)\}$，则

(1) $\varnothing\in\mathscr{T}$, $\mathbf{R}\in\mathscr{T}$.

(2) 若 $A,B\in\mathscr{T}$，则由 $A\cap B\subset\varphi(A)\cap\varphi(B)=\varphi(A\cap B)$，得 $A\cap B\in\mathscr{T}$.

(3) 若 $\{A_\alpha:\alpha\in I\}\subset\mathscr{T}$，则由 $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha\subset\bigcup\limits_\alpha\varphi(A_\alpha)\subset\varphi(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha)$，得 $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha\in\mathscr{T}$.

于是 $\mathscr{T}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个拓扑，称它为 $\mathbf{R}$ 的密度拓扑（density topology）. 下面我们把 $(\mathbf{R},\mathscr{T})$ 记作 X.

1.3.3 定理 $X=(\mathbf{R},\mathscr{T})$ 有下列性质：

(1) X 比 $\mathbf{R}$ 的拓扑细.

(2) X 是正则的.

(3) X 是 CCC 的.

(4) 设 $A\subset\mathbf{R}$，则下列命题是等价的：(a) $m(A)=0$；(b) A 是 nwd 集；(c) A 是 meager 集；(d) A 是闭离散集.

证明 (1) 设 I 是开区间，则 $\varphi(I)=I$，即每个开区间 $I\in\mathscr{T}$. 所以 $\mathscr{T}$ 比区间拓扑细，因而 $(\mathbf{R},\mathscr{T})$ 是 T_2 的，次可度量的.

(2) 设 $E\in\mathscr{T}$, $x\in E$. 这时 $x\in\varphi(E)$，对充分大的 n，有 $m\left(E\cap\left[x_n-\frac{1}{2n},x+\frac{1}{2n}\right]\right)>0$. 取 $\mathbf{R}$ 中一个紧集 $F_n\subset E\cap\left(x-\frac{1}{2n},x+\frac{1}{2n}\right)$，使 $m(F_n)>\left(1-\frac{1}{n}\right)m\left(E\cap\left(x-\frac{1}{2n},x+\frac{1}{2n}\right)\right)$. 记 $F=\{x\}\cup(\bigcup\limits_n F_n)$，则 F 是 $\mathbf{R}$ 中的闭集，因而也是 X 中的闭集，于是 $\varphi(F)\subset F$. 因为 $d_E(x)=1$，所以 $n\cdot m\left(F\cap\left(x-\frac{1}{2n},x+\frac{1}{2n}\right)\right)\geqslant$ $n\cdot m(F_n)\geqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)\dfrac{m\left(E\cap\left(x-\frac{1}{2n},x+\frac{1}{2n}\right)\right)}{2\cdot\frac{1}{2n}}\to 1$，于是 $x\in\varphi(F)$. 现

在证明,对每个 $A\in\mathscr{M}$,有 $\varphi(A)\in\mathscr{T}$,即 $\varphi(A)\subset\varphi(\varphi(A))$,注意 $\varphi(A)\sim A$,故对任何开区间 I,有 $\varphi(A)\cap I\sim A\cap I$,于是 $\frac{m(\varphi(A)\cap I)}{m(I)}=\frac{m(A\cap I)}{m(I)}$.所以 $x\in\varphi(\varphi(A))$ 当且仅当 $x\in\varphi(A)$.这就证明了 $\varphi(\varphi(A))=\varphi(A)$.于是 $\varphi(F)$ 就是 x 的一个邻域,并且 $\mathrm{Cl}_{\mathscr{T}}F\subset F\subset E$,亦即 X 是正则空间.

(3) 注意,若 E 是 X 中的不空开集,则 $m(E)>0$,由于 m 是 σ 有限的测度,X 中互不相交的非空开集族顶多有可数个元.

(4) 若 E 是零测度集,则易见有 $\varphi(\mathbf{R}-E)=\mathbf{R}$.即 $\mathbf{R}-E\in\mathscr{T}$.因此每个零测度集都是闭集,于是 $m(A)=0\Rightarrow A$ 是闭离散集 $\Rightarrow A$ 是 nwd 集 $\Rightarrow A$ 是 meager 集.设 A 是 nwd 集,由定理 1.3.1,有 $\varphi(A)\sim A$,于是 $m(\varphi(A)-A)=0$,即 $\varphi(A)-A$ 是闭的,但 $\varphi(A)$ 又是开的,故 $\varphi(A)-(\varphi(A)-A)\in\mathscr{T}$.又因为 $\varphi(A)-(\varphi(A)-A)\subset A$,$A$ 是 nwd 集,所以 $\varphi(A)-(\varphi(A)-A)=\varnothing$,即 $\varphi(A)\subset\varphi(A)-A$.由此得 $m(\varphi(A))=0$.再由 $\varphi(A)\sim A$,得 $m(A)=0$.由 m 的 σ 可加性可知,每个 meager 集也都是零测度集. □

1.3.4 定理 X 是无处可分的,遗传 Baire 空间,并且每个 $E\in\mathscr{M}$ 都是 G_δ 集.

证明 因为每个可数集 $D\subset\mathbf{R}$ 都有测度零,从而是 cnwd 集,所以 D 不能在任何不空开集上稠密,这说明 X 是无处可分的.由此也可以看出 X 中不存在任何非平凡的收敛序列.设 $Y\subset X$,假如 Y 是 nwd 集,那么 Y 就是一个闭离散集.子空间 Y 中唯一的稠密集就是 Y 自身,所以 Y 是 Baire 空间.假如 Y 不是 nwd 集,设 $\{G_n:n<\omega\}$ 是一列开集,使 $G_n\cap Y$ 是 Y 中的稠密集.则 $Y-G_n$ 是 Y 中的,从而也是 X 中的 nwd 集.$\bigcup_n(Y-G_n)=Y-\bigcap_n G_n$ 是 X 中的 nwd 集,于是 $Y-\bigcap_n G_n\neq Y$,即 $(\bigcap_n G_n)\cap Y\neq\varnothing$,所以 Y 也是 Baire 空间. □

1.3.5 定理 对每个 $Y\subset X$,存在一个 CCC 集 C 和一个闭离散集 C,使 $Y=C\cup D$.

证明 注意 $Y=[Y\cap\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}Y)]\cup[Y\cap(\mathrm{Cl}Y-\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}Y))]$,由于 X

是 CCC 的，所以它的开子集 $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}Y)$ 也是 CCC 的．而 $C = Y \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}Y)$ 是 $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}Y)$ 的稠密子集，所以 C 是 CCC 的．又 $Y \cap (\mathrm{Cl}Y - \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}Y) = D$ 是一个 nwd 集，因此是闭离散集． □

1.3.6 定理 X 的子空间 Y 是遗传 Lindelöf 的充要条件是：Y 是一个 Sierepinski 集．

证明 (1) 设 Y 是遗传 Lindelöf 子空间．又设 $m(E)=0$，则 E 是闭离散集，$Y \cap E$ 是子空间 Y 中的闭离散集，于是 $|Y \cap E| \leqslant \omega$．这就证明了 Y 是 Sierepinski 集．

(2) 设 Y 是 Sierepinski 集．由 1.3.5，$Y = C \cup D$，其中 D 是 CCC 集，D 是闭离散集．设 $\mathscr{U}$ 是 Y 的一个开覆盖，因为 C 是 CCC 的，存在可数子族 $\mathscr{U}_1 \subset \mathscr{U}$，使 $\bigcup \mathscr{U}_1$ 在 C 中稠密．于是 $C - \bigcup \mathscr{U}_1$ 是一个 nwd 集．$Y - \bigcup \mathscr{U}_1 = (C \cup D) - \bigcup \mathscr{U}_1$ 是 Y 中的 nwd 集，因而有测度零．Y 是 Sierepinski集，由定义 $Y - \bigcup \mathscr{U}_1$ 是可数集，存在可数子族 $\mathscr{U}_2 \subset \mathscr{U}$，使 $Y \subset (\bigcup \mathscr{U}_1) \cup (\bigcup \mathscr{U}_2)$．这便证明了 Y 是 Lindelöf 的．由于 Sierepinski 集的任何不可数子集仍是 Sierepinski 集，所以 Y 是遗传 Lindelöf 空间． □

现在我们可以叙述 Tall 的主要结论了．

1.3.7 定理(CH) 存在一个 L 空间 Y，它是 0 维，正则和遗传 Baire 的．

证明 由定理 1.1.2、1.3.4 及 1.3.6 即可得证． □

Baire 性质是拓扑空间的一个重要性质．泛函分析中关于 Banach 空间的"范畴论证"(Category argument)，就是奠定在完备度量空间具有 Baire 性质的基础上的，它在证明某些存在性命题(比如，处处不可微的连续函数存在性，Fourier 展开式在一个稠密 G_δ 集上发散的周期为 2π 的连续函数存在性等)时是一个有力的工具．那么，是否任意两个 Baire 空间的乘积还是 Baire 空间，这是一个受到关注的问题，1961 年 Oxtoby [1961]借助 CH 找到了一个反例，1975 年 White Jr. 在 CH 下，在 $\mathbf{R}$ 的密度拓扑空间找到了反例([1975])．最后，1976 年 Cohen 给出了一个绝对反例(所谓绝对反例是指不借助于 ZFC 以外的任何集论假设，仅仅用 ZFC 公理系统构造出来的反例)．不过有趣的是，尽管 Cohen[1976]作出的是一个绝对反例，但它的构造方式却是采用 forcing 这种典型的集论

方式，而且作者本人一开始也没有意识到它的绝对性，还是在审稿过程中被审稿人发现并指出来的.这一节余下的部分我们介绍 White 的结果.

1.3.8 定理(CH) 存在一个完全正则，遗传 Lindelöf，遗传 Baire 的齐次空间 Y，使 $Y\times Y$ 不是 Baire 空间.

证明 设 Y 是如 1.1.12 中所作的 Sierepinski 集，记 ϵ 为 Y 的区间拓扑.已知$(Y,+)$是一个群，(Y,ϵ)是 $\mathbf{R}$ 中的一个 meager 集，现在把 Y 看做$(\mathbf{R},\mathscr{T})=X$ 的子空间.如定理 1.3.6 所述，Y 是一个正则，遗传 Baire 的 L 空间.

对任何 $x_0,y_0\in Y$，有 $z_0=y_0-x_0\in Y$，于是 $\varphi(x)=x+z_0$ 是 Y 到 Y 上的一一映射，满足 $\varphi(x_0)=y_0$.由直线上 Lebesgue 测度的平移不变性，可推出 φ 是 Y 上的一个拓扑映射.所以 Y 是齐次空间.

下面证明 $Y\times Y$ 是 $X\times X$ 中的一个 meager 集.由于 Y 是 Sierepinski 集，有 $m^*(Y)>0$，又由 Y 的作法，$Y=\bigcup\limits_n A_n$，其中每个 A_n 是 $\mathbf{R}$ 中的 nwd 集，令 $H_n=\mathbf{R}-\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，则 H_n 是 $\mathbf{R}$ 中的开稠密集，由 $\mathbf{R}$ 的完备性，$H=\bigcap\limits_n H_n$ 是 $\mathbf{R}$ 中的稠密 G_δ 集.显然有 $Y\cap H=\varnothing$.

令 $K=\{(x,y):x-y\in H\}$.因为 H 是 G_δ 集，所以 K 是 $\mathbf{R}^2$ 中的 G_δ 集，从而也是 X^2 中的 G_δ 集.并且若 A,B 是 $\mathbf{R}$ 中测度大于 0 的集，则由 Helson[1948]的一个结果，有 $K\cap(A\times B)\neq\varnothing$.于是 K 是 X^2 中的一个稠密集.设 $K=\bigcap\limits_n V_n$，其中 V_n 是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集.由于$(Y,+)$是群，由 K 的定义及 $Y\cap H=\varnothing$ 可以推得$(Y\times Y)\cap K=\varnothing$，即 $Y\times Y\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}-K=\bigcup\limits_n(\mathbf{R}\times\mathbf{R}-V_n)$.因为 V_n 是 X^2 中的开稠密集.所以 $Y\times Y$ 是 X^2 中的 meager 集.这说明 $Y\times Y$ 不是 Baire 空间. □

§4 一种加细给定拓扑的机器，Kunen 线

这一节我们介绍由 Juhasz、Kunen 和 Rudin[1976]所创立的，运用 CH 加细一个给定拓扑的机器.当把这个机器施行于 $\mathbf{R}$ 时，就能够产生

一个具有良好性质的 S 空间.

1.4.1 机器的构造(CH) 设(X,ρ)是一个势为 2^ω 的第一可数的 T_2 空间,$X=\{x_\xi:\xi<\omega_1\}$.对 $\alpha<\omega_1$,记 $X_\alpha=\{x_\xi:\xi<\alpha\}$.记 $\rho_\alpha=\rho\cap\mathscr{P}(X_\alpha)$是 X_α 作为(X,ρ)的子空间导出的拓扑.设$\{S_\xi:\xi<\omega_1\}$是$[X]^{\leqslant\omega}$的一个排列,使得$\forall\xi<\omega_1$,有 $S_\xi\subset X_\xi$.(这种排列方式是可以实现的,证明如下:任取$[X]^{\leqslant\omega}$的一个排列$\{F_\xi:\xi<\omega_1\}$,亦即给出一个 ω_1 到$[X]^{\leqslant\omega}$上的一一映射f,使$f(\xi)=F_\xi$,定义$\sigma(0)=\varnothing$,$\sigma(1)=\{x_1\}$.假设$\forall\xi<\alpha$,$\sigma(\xi)$已定义,使得$\sigma(\xi)\subset X_\xi$成立.现在定义

$$\varphi(\alpha)=\min\{\xi:f(\xi)\in[X_\alpha]^{\leqslant\omega}-\{\sigma(\xi):\xi<\alpha\}\}.$$

因为$|[X_\alpha]^{\leqslant\omega}|>|\alpha|$,$f$是一一映射.上述式中右边的集是不空的,$\varphi(\alpha)$能够妥善地定义.现在再定义$\sigma(\alpha)=f(\varphi(\alpha))$,这就完成了归纳过程.令 $S_\alpha=\sigma(\alpha)$.显然有 $S_\alpha\subset X_\alpha$.另外由 σ 的定义看出σ 是一个一一映射.余下只须证明 σ 是到上的.假如$[X]^{\leqslant\omega}-\operatorname{ran}\sigma\neq\varnothing$.这就意味着$\{\xi:f(\xi)\overline{\in}\operatorname{ran}\sigma\}\neq\varnothing$.令 $\eta=\min\{\xi:f(\xi)\overline{\in}\operatorname{ran}\sigma\}$.则$f(\eta)\overline{\in}\operatorname{ran}\sigma$,而$\forall\xi<\eta$,有$f(\xi)\in\operatorname{ran}\sigma$.取 $\alpha=\min\{\beta:f(\eta)\in[X_\beta]^{\leqslant\omega}\}$.根据 φ 的定义,有$\varphi(\alpha)=\eta$,从而$\sigma(\alpha)=f(\eta)$.矛盾.)

按归纳方式,对每个 α,定义 X_α 上一个新的拓扑τ_α,使它满足如下的归纳条件:

(1) $\forall\beta<\alpha\leqslant\omega_1$,$\tau_\beta=\tau_\alpha\cap\mathscr{P}(X_\beta)$.

(2) $\rho_\alpha\subset\tau_\alpha$.

(3) τ_α 是第一可数,局部紧,0 维 T_2(从而是局部紧和可度量的)拓扑.

(4) $\forall\gamma<\beta<\alpha$,若 $x_\beta\in\mathrm{Cl}_\rho S_\gamma$,则 $x_\beta\in\mathrm{Cl}_{\tau_\alpha}S_\gamma$.其具体作法如下:

① $\alpha\leqslant\omega$ 时,取 τ_α 为 X_α 的离散拓扑.

② $\omega<\alpha<\omega_1$.设对所有 $\beta<\alpha$,τ_β 已经作好.

A. α 是极限序数.则令 $\tau_\alpha=\sum_{\beta<\alpha}\tau_\beta$,这里$\sum_{\beta<\alpha}\tau_\beta$ 表示它是以$\bigcup_{\beta<\alpha}\tau_\beta$ 为子基生成的 X_α 的拓扑.

B. $\alpha=\beta+1$ 是后继序数.这时 $X_\alpha=X_\beta\cup\{x_\beta\}$.根据条件 $\tau_\alpha\cap\mathscr{P}(X_\beta)=\tau_\beta$,只须定义包含点 x_β 的那些开集.分两种情况讨论如下:

a. 若$\forall \xi < \beta$,有 $x_\beta \overline{\in} \mathrm{Cl}_\rho S_\xi$.则定义$\{x_\beta\} \in \tau_\alpha$,即 x_β 是(X_α, τ_α)中的孤立点.τ_α 由 $\tau_\beta \cup \{\{x_\beta\}\}$生成.

b. $\{\xi < \beta : x_\beta \in \mathrm{Cl}_\rho S_\xi\} \neq \varnothing$.将这个集排成$\{\xi_n : n < \omega\}$,使其中的每个 ξ 被排列无限多次.取 x_β 在(X, ρ)中的一个可数下降开邻域基$\{U_n : n < \omega\}$.对每个 n,取 $p_n \in U_n \cap S_{\xi_n}$.因为 $p_n \xrightarrow{\rho} x_\beta \overline{\in} X_\beta$,所以$\{p_n : n < \omega\}$是$(X_\beta, \tau_\beta)$中的闭离散集.$(X_\beta, \tau_\beta)$是 0 维局部紧可度量空间,于是存在关于 τ_β 是紧开集的序列$\{K_n : n < \omega\}$,它们互不相交,并且对所有 m,有 $p_n \in K_n \subset U_n$.记 $\mathscr{B}_\alpha = \{\{x_\beta\} \cup [\bigcup_{j > n} K_j] : n < \omega\}$.定义 τ_α 为由 $\tau_\beta \cup \mathscr{B}_\alpha$ 生成的拓扑.这时归纳条件(1)~(4)仍然是满足的.

最后令 $\tau = \sum_{\alpha < \omega_1} \tau_\alpha$.这时 τ 是 X 上一个 0 维局部紧 T_2,第一可数和局部可数的拓扑.$\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$是 X 的开覆盖,它没有可数子覆盖,所以 X 不是 Lindelöf 空间. □

1.4.2 定理(CH) 设(X, ρ)是遗传可分,第一可数 T_2 空间,(X, τ)是由上述机器产生的空间.则

(1) 若 $A \subset X$,则$|\mathrm{Cl}_\rho A - \mathrm{Cl}_\tau A| \leqslant \omega$.

(2) (X, τ)是遗传可分的.

(3) 若(X, ρ)是全的,则(X, τ)也是全的.

(4) 若(X, ρ)是正则遗传 Lindelöf 的,则(X, τ)是正规的.

(5) 若(X, ρ)是正则 Lindelöf 的,则(X, τ)是实紧(realcompact)的.

证明 (1) 由假设,存在可数集 $B \subset A$,使 $\mathrm{Cl}_\rho B = \mathrm{Cl}_\rho A$.设 $B = S_\alpha$,则由归纳条件(4),$\mathrm{Cl}_\rho A - \mathrm{Cl}_\tau A \subset \{x_\xi : \xi < \alpha\}$,因此是可数的.

(2) 对每个 $C \subset X$,设 A 是可数集,使 $\mathrm{Cl}_\rho A = \mathrm{Cl}_\rho C$.则 $A \cup (C - \mathrm{Cl}_\tau A)$是可数的,并且是 C 的稠密子集.所以子空间 C 是可分的.

(3) 设 $A \subset X$ 是一个 τ 闭集.由(1),$|\mathrm{Cl}_\rho A - A| \leqslant \omega$.由假设,$\mathrm{Cl}_\rho A$ 是(X, ρ)中的 G_δ 集,从而也是(X, τ)中的 G_δ 集.而 $\mathrm{Cl}_\rho A - A$ 是(X, τ)中的 F_σ 集,所以 $A = \mathrm{Cl}_\rho A - (\mathrm{Cl}_\rho A - A)$是$(X, \tau)$中的 G_δ 集.

(4) 设 H, K 是互不相交的 τ 闭集.称一个 τ 开集 U 是"好"的.如果 $\mathrm{Cl}_\tau U$ 至多与 H, K 中的一个相交,对每个 $p \in X$,取 p 的一个"好"邻域 $U(p)$,因为 $X - (\mathrm{Cl}_\rho H \cap \mathrm{Cl}_\rho K)$是 ρ 正则,ρLindelöf 的 ρ 开子空间.所

以有可数个 ρ 开集(从而也是 τ 开集),使它们的并等于 $X-(\mathrm{Cl}_\rho H\cap \mathrm{Cl}_\rho K)$,并且它们的 ρ 闭包至多与 H,K 中的一个相交. 由于 $\rho\subset\tau$,有 $\mathrm{Cl}_\tau A\subset \mathrm{Cl}_\rho A$. 所以这些集也是"好"的 τ 开集. 由(1), $\mathrm{Cl}_\rho H\cap \mathrm{Cl}_\rho K$ 一定是可数的. 于是整个 X 有一个仅仅由"好"的 τ 开集组成的可数覆盖 $\mathscr{U}$. 将 $\mathscr{U}$ 分成两部分 $\mathscr{V}=\{V_n\in\mathscr{U}: V_n\cap H\neq\varnothing\}$ 和 $\mathscr{W}=\{W_n\in\mathscr{U}: W_n\cap K\neq\varnothing\}$. 于是 $V=\bigcup_n(V_n-\bigcup_{j\leq n}\mathrm{Cl}_\tau W_j)$, $W=\bigcup_n(W_n-\bigcup_{j\leq n}\mathrm{Cl}_\tau V_j)$就是分离 H 和 K 的 τ 开集.

(5) 设 $\mathscr{U}$ 是 (X,τ) 的一个 σ-完备的 Z 超滤. 则 $\mathscr{V}=\{Z\in\mathscr{U}: Z$ 是 ρ 闭的$\}$是 σ-完备的. 假定 X 是 ρLindelöf 的,则有$\bigcap\mathscr{V}\neq\varnothing$. 取一个点 $p\in\bigcap\mathscr{V}$. 利用(X,ρ)的第一可数性与完全正则性,存在 X 到$[0,1]$区间的 ρ 连续函数f,使$\{p\}=f^{-1}(0)$. 于是对每个 n, $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n},1\right]\right)\in\mathscr{V}$. 从而 $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n},1\right]\right)\notin\mathscr{U}$. 于是由 $\mathscr{U}$ 的极大性, $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{n}\right]\right)\in\mathscr{U}$. 因为 $\mathscr{U}$ 是 σ-完备的,所以$\{p\}\in\mathscr{U}$,即 $p\in\bigcap\mathscr{U}$,因此 $\mathscr{U}$ 是主超滤. 这便证明了(X,τ)是实紧的. □

当我们把 $\mathbf{R}$(它是遗传可分,遗传 Lindelöf 的)作为机器的输入时,便得到如下定理.

1.4.3 定理(CH) 存在全正规,局部紧,局部可数,第一可数,0 维实紧的 S 空间. □

这个空间人们常称之为 Kunen 线.

上述由给定空间通过 ω_1 步归纳产生新空间的技巧是一个强有力的工具,被许多人用来构造有用的反例. Juhasz, Kunen, Rudin 在同一篇文章中,从 Lusin 集出发,还构造了一个正规,局部紧,第一可数,遗传可分,但不是可数仿紧的空间. 它不但是一个 S 空间(因为正则 Lindelöf 空间是仿紧的),而且还是一个 Dowker 空间. 所谓 Dowker 空间指的是正规而不是可数仿紧的空间. 1951 年 Dowker 曾经证明,乘积空间 $X\times I$ 是正规的充分必要条件为, X 是正规可数仿紧空间(见Dowker[1951],这里 I 指的是单位区间$[0,1]$). 另外,在同伦理论中也提出了是否任何正规空间与 I 的乘积都是正规的问题. 这样自然会问,有没有正规但不

是可数仿紧(等价于正规,不是可数亚紧)的空间?最早,1955 年 Rudin 在承认存在 Suslin 线的前提下作出了一个 Dowker 空间(见 Rudin [1955]).1971 年她进一步在 ZFC 系统中作出了一个绝对例子(Rudin [1971]),这个例子的构造涉及箱乘积,而且看来它的势很大,等于 $(\omega_\omega)^\omega$.它既不是可分的,也不是第一可数的.Dow, van Mill[1982]给出了一个极不连通的 Dowker 空间,但它的构造仍然是以 Rudin 的例子作为素材加工的,并未脱其窠臼.此外,对 Rudin 的这个例子,Hart[1981],[1982]两篇文章证明了它是 2-full 正规和 orthocompact 的.这也只是枝节性的成果.总之,关于 Dowker 空间的绝对例子,迄今为止就只有这么一个不太令人满意的空间.然而借助于某些集论假设,人们却可以构造出许多具有良好性质的"小"Dowker 空间.我们在后面还将陆续提及.有关 Dowker 空间的较全面的介绍,读者可以参看 Rudin 在《Handbook of Set-Theoretic Topology》一书中写的 Dowker 空间一章.

此外,利用 CH 和本节类似的技法,Rudin 和 Zenor 还作出了一个全正规,不可度量的流形(见 Rudin, Zenor[1976]).

§5 Calibre ω_1 与可分性,CH 的一个等价命题

1.5.1 定义 设 κ 是一个基数,拓扑空间 X 称为有 Calibre κ,如果对任何一个由非空开集组成的势 $\geqslant\kappa$ 的开集族 $\mathscr{U}$,存在势等于 κ 的子族 $\{U_\alpha:\alpha<\kappa\}\subset\mathscr{U}$,使 $\bigcap_{\alpha<\kappa}U_\alpha\neq\varnothing$.

X 的子集族 $\mathscr{U}$ 称为是点-κ 的.如果对任一 $x\in X$,有 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{U})=|\{U\in\mathscr{U}:x\in\mathscr{U}\}|<\kappa$.注意点-$\omega_1$ 族就是通常所说的点可数族. □

因此,X 有 Calibre κ 等价于说 X 的任何点-κ 开集族都有小于 κ 的势.特别地,X 有 Calibre ω_1(简记为 Cal ω_1)等价于 X 的每个点可数开集族都是可数的.

1.5.2 命题 任何可分空间都有 Cal ω_1.任何有 Cal ω_1 的空间都是 CCC 空间.

证明 略. □

Sanin[1948]证明了,如果 $\{X_s:s\in S\}$ 中每个 X_s 有 Calibre κ,而 κ 是

正则基数,则 $\Pi\{X_s:s\in S\}$ 有 Calibre κ.特别地,任意一族有 Cal ω_1 的空间的乘积仍有 Cal ω_1.因此并非每个有 Cal ω_1 的空间都是可分的.例如,设 $D=\{0,1\}$ 是离散空间.则 D^{2^c} 有 Cal ω_1,但它不是可分的.因为若 X 是可分 T_2 空间,则 $|X|\leqslant 2^{2^{d(X)}}=2^{2^\omega}=2^c$,但 $|D^{2^c}|=2^{2^c}>2^c$.然而,对于第一可数的 T_2 空间类,却从如下的命题可得出某种肯定的结论.

1.5.3 定理(CH) 势 $\leqslant 2^\omega$ 的有 Cal ω_1 的空间一定是可分的.

证明 设 $X=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$.假若 X 不是可分的,则对每个 $\alpha<\omega_1$, $U_\alpha=X-\{x_\xi:\xi<\alpha\}^-$ 是不空的开集.令 $\mathscr{U}=\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha<\omega_1\}$,则 $|\mathscr{U}|=\omega_1$,而对每个 $x\in X$,有 $\operatorname{ord}(x,\mathscr{U})=\omega$.因此 X 没有 Cal ω_1. □

1.5.4 推论(CH) 任何一个有 Cal ω_1 的第一可数的 T_2 空间, X 都是可分的(Efimov).

证明 利用不等式 $|X|\leqslant 2^{\chi(X)\cdot c(X)}=2^\omega=\omega_1$(参看 Hodel[1984] 4.7)及 1.5.3 即得. □

在第二章,我们将利用 MA + ┐ CH 证明定理 1.2.7 中的那个空间 $\mathscr{K}$ 有 Cal ω_1.这表明 1.5.4 所述的命题是与 ZFC 独立的.下面我们将证明 1.5.3 中所述的命题实质上与 CH 等价.

1.5.5 定义 拓扑空间 X 称为 * Lindelöf 的.如果对 X 的任何一个开覆盖 $\mathscr{U}$,都存在 $A\in[X]^{\leqslant\omega}$,使 $\bigcup\{\operatorname{St}(x,\mathscr{U}):x\in A\}=X$.(戴牧民[1983]) □

容易证明,每个可分空间或 $\aleph_1$ 紧空间都是 * Lindelöf 空间.空间 X 是 Lindelöf 的当且仅当 X 是 * Lindelöf 和亚 Lindelöf 的.

1.5.6 定理 下列各命题相互等价:

(1) CH.

(2) 势 $\leqslant 2^\omega$ 的有 Cal ω_1 的空间是可分的.

(3) 势 $\leqslant 2^\omega$ 的有 Cal ω_1 的空间是 * Lindelöf 的.(戴牧民[1989])

证明 (1)⇒(2)即定理 1.5.3.由(2)⇒(3)是显然的.为了证明(3)⇒(1),先给出两个引理.

引理 1 设 X 是有 Cal ω_1 的第一可数空间, $\mathscr{U}$ 是一个不可数的开集族,则存在不可数的子族 $\mathscr{U}^*$,使 $\operatorname{Int}(\bigcap\mathscr{U}^*)\neq\varnothing$.

证明 首先，$\mathscr{U}$有一个不可数的子族 $\mathscr{U}_0$，使$\bigcap \mathscr{U}_0 \neq \varnothing$. 取 $p \in \bigcap \mathscr{U}_0$及 p 的一个可数局部基$\{B_n(p): n \in \mathbf{N}\}$. 设 $n \in \mathbf{N}$，令 $\mathscr{U}_n = \{U \in \mathscr{U}_0: B_n(p) \subset U\}$，则 $\mathscr{U}_0 = \bigcup\{\mathscr{U}_n: n \in \mathbf{N}\}$. 于是存在一个 n，使$|\mathscr{U}_n| > \omega$. 令 $\mathscr{U}^* = \mathscr{U}_n$，则$\varnothing \neq B_n(p) \subset \bigcap \mathscr{U}^*$.

引理 2($\neg$ CH) ($\mathbf{R}, S \vee C$)是一个有 Cal ω_1 的不可分 T_2 空间. (此处 $S \vee C$ 表示由以 $\mathscr{S} = \{[a, b): a < b, a, b \in \mathbf{R}\} \cup \{\mathbf{R} - A: A \in [\mathbf{R}]^{\leqslant \omega}\}$为子基生成的拓扑.)

证明 设 $\mathscr{G}$是($\mathbf{R}, S \vee C$)的一个不可数开集族. 注意每个 $G \in \mathscr{G}$都可以表示为 $G = U(G) - A(G)$的形式. 其中 $U(G)$是 Sorgenfrey 线中的开集而 $A(G) \in [\mathbf{R}]^{\leqslant \omega}$. Sorgenfrey 拓扑显然满足引理 1 的条件. 于是存在 $\mathscr{G}_0 = \{U_\alpha - A_\alpha: \alpha < \omega_1\} \subset \mathscr{G}$和$(a, b)$，使$(a, b) \subset \bigcap\{U_\alpha: \alpha < \omega_1\}$. 由$\neg$ CH 和$|\bigcup\{A_\alpha: \alpha < \omega_1\}| \leqslant \omega_1$ 知$\bigcap \mathscr{G} = \bigcap\{U_\alpha: \alpha < \omega_1\} - \bigcup\{A_\alpha: \alpha < \omega_1\} \neq \varnothing$. 这便证明了($\mathbf{R}, S \vee C$)有 Cal ω_1. 因为任何可数子集都是闭集，所以($\mathbf{R}, S \vee C$)是无处可分的.

现在转到(3)⇒(1)的证明. 记 $L_0 = \mathbf{R} \times \{0\}$，$L_1 = \mathbf{R} \times \{1\}$，$X = L_0 \cup L_1$. 定义 X 的一个拓扑 σ 如下. $G \in \sigma$ 当且仅当：①若$\langle x, 1\rangle \in G$，则存在 n 和 $A \in [\mathbf{R}]^{\leqslant \omega}$，使$\left(\left[x, x + \frac{1}{n}\right) - A\right) \times \{1\} \subset G$；②若$\langle x, 0\rangle \in G$，则存在 n 和 $A \in [\mathbf{R}]^{\leqslant \omega}$，使$\left(\left(x - \frac{1}{n}, x\right) - A\right) \times \{1\} \subset G$. 可以验证：① X 的任意两点是函数分离的. 从而 X 是 T_2 空间. ② L_0 是 X 的闭离散集. ③ L_1 是 X 的开稠密集. 由引理 2，L_1 有 Cal ω_1. 由于 L_1 是 X 的开稠密集，X 也有 Cal ω_1. 今证明 X 不是 * Lindelöf 空间. 易见$|[\mathbf{R}]^{\leqslant \omega}| = 2^\omega = c$. 作 $2^\omega = \{\alpha: \alpha < c\}$到$[\mathbf{R}]^{\leqslant \omega}$的一个满射$f$，使得对每个 $A \in [\mathbf{R}]^{\leqslant \omega}$，$|f^{-1}(A)| = c$. 又将 $\mathbf{R}$ 中的点排列为$\{x_\alpha: \alpha < c\}$. 对每个 $\alpha < c$，令 $G_\alpha = \{\langle x_\alpha, 0\rangle\} \cup (\mathbf{R} - f(\alpha)) \times \{1\}$，则 $\mathscr{G} = \{G_\alpha: \alpha < c\}$是 X 的一个开覆盖，注意$\langle x_\alpha, 0\rangle \in G_\beta$ 当且仅当$\alpha = \beta$. 现在，若 $M \in [L_1]^{\leqslant \omega}$，设 $M = A \times \{1\}$，则当 $f(\alpha) = A$ 时有 $G_\alpha \cap M = \varnothing$. 于是$\langle x_\alpha, 0\rangle \overline{\in} \bigcup\{\mathrm{St}(p, \mathscr{G}): p \in M\}$. 但$|\{\alpha: f(\alpha) = A\}| = c$，所以对每个 $N \in [L_0]^\omega$，存在 α，使 $f(\alpha) = A$ 而$\langle x_\alpha, 0\rangle \overline{\in} \bigcup\{\mathrm{St}(p, \mathscr{G}): q \in N\}$. 于是定理得证. □

§6 用 CH 构造具有良好性质的可数仿紧,非正规空间

在§4我们介绍过 Dowker 空间的概念,这指的是正规,非可数仿紧的空间,我们也提到过这种空间在 ZFC 系统中是很难找到的.与Dowker 空间概念相对的一类空间,即正则,可数仿紧,非正规的空间,被称为反 Dowker 空间(Anti-Dowker Space).这种空间的存在性也并不是显而易见,随便能举出来的.然而它确实有多个绝对例子,比如 Wage 的[1976a]和[1977]就分别作出过全的和第一可数,可分的反 Dowker 空间.这一节我们将介绍 Wage 用 CH 构造一个全的,局部紧的同时是 S 空间和反 Dowker 空间的方法.

1.6.1 空间的构造 设 $X=\mathbf{R}\times\omega$.当 $k>1$ 时,取$\left\{\left\{\langle y,k\rangle:|y-x|<\frac{1}{n}\right\}:n<\omega\right\}$作为点$\langle x,k\rangle$的邻域基,当 $i=0,1$ 时,取$\left\{\langle y,k\rangle:k=i,\text{或 }k>n>0,|y-x|<\frac{1}{n}\right\}$作为点$\langle x,i\rangle$的第 n 个邻域($n\in\mathbf{N}$).以这些邻域系作基生成 X 的一个拓扑ρ.这样(X,ρ)是一个遗传可分,但不是 T_2 的空间.

承认 CH.记 $\mathbf{R}=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$,$X_\alpha=\{\langle x_\beta,k\rangle:k<\omega,\beta<\alpha\}$.又记$[X]^\omega=\{S_\alpha:\alpha<\omega_1\}$,使得对每个 α,有 $S_\alpha\subset X_\alpha$.下面按归纳方式,对每个 $\eta\leqslant\omega_1$,构造 X_η 上的一个拓扑τ_η,使之满足如下条件:

$\forall\xi<\eta\leqslant\omega_1$,(1) $\tau_\xi=\tau_\eta|X_\xi$,其中$\tau_\eta|X_\xi$表示由 τ_η 生成的 X_ξ 的子空间拓扑.(2) 每个 τ_η 都是0维,第一可数,局部紧 T_2 拓扑.(3) $\tau_\eta\supset\{U\cap X_\eta:U\in\rho\}$.(4) $\forall\mu<\xi$,若 $x_\xi\in\mathrm{Cl}_\rho S_\mu$,则 $x_\xi\in\mathrm{Cl}_{\tau_\eta}S_\mu$.

具体的构造步骤如下:

A. 当 $\beta\leqslant\omega$ 时,令 τ_β 是离散拓扑.

B. 当 $\beta>\omega$ 是极限序数时,令 $\tau_\beta=\{U\subset X_\beta:\forall\eta<\beta,U\cap X_\eta\in\tau_\eta\}$.不难验证条件(1)—(4)是满足的.

C. $\beta>\omega,\beta=\alpha+1$.这时 $X_\beta=X_\alpha\cup\{x_\alpha\}\times\omega$.由(1)可知,只需对

$\{X_\alpha\}\times\omega$ 中的每个点$\langle x_\alpha,k\rangle$规定邻域基即可.

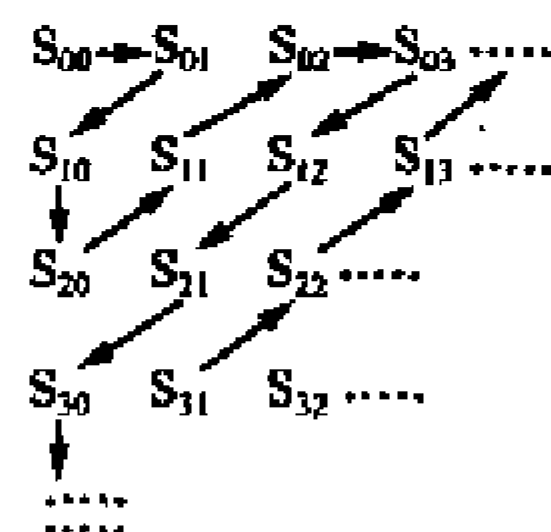
(i) 若对所有的 $\mu<\alpha$,$\langle x_\alpha,k\rangle\in \mathrm{Cl}_\rho S_\mu$,则规定$\langle x_\alpha,k\rangle$为 τ_β 中的孤立点.

(ii) 否则,记 $\Lambda=\{k:\exists\,\mu<\alpha$,使$\langle x_\alpha,k\rangle\in \mathrm{Cl}_\rho S_\mu\}$.对每个 $k\in\Lambda$ 和 $n<\omega$,取 B_{kn}使之满足:(a) B_{kn}是 X_α 中的紧开集.(b) $(k,n)\neq(j,m)$ 时有 $B_{kn}\cap B_{jm}=\varnothing$.(c) 若 $U\in\rho$,$\langle x_\alpha,k\rangle\in U$,则除有限个 n 外,有 $B_{kn}\subset U$.(d) 若 $\forall\,\mu<\beta$,$\langle x_\alpha,k\rangle\in \mathrm{Cl}_\rho S_\mu$,则有无限多个 n,使 $S_\mu\cap B_{kn}\neq\varnothing$.

现在我们来证明这样的 B_{kn}确实是可以选出来的.我们对 Λ 中的数进行归纳.设 k_0是 Λ 中最小的数,则至少有一个 $\mu<\alpha$,使$\langle x_\alpha,k_0\rangle\in \mathrm{Cl}_\rho S_\mu$.这样的 μ 顶多有可数个,设为 $\mu_0,\cdots,\mu_i,\cdots$.又设$\langle x_\alpha,k_0\rangle$的一个 ρ 局部基为$\{V_j:j<\omega\}$.对每个 i,因为$\langle x_\alpha,k_0\rangle\in \mathrm{Cl}_\rho S_{\mu i}$,故可以从 $S_{\mu i}$ 选出一个 ρ 收敛于$\langle x_\alpha,k_0\rangle$的序列$\{S_{ij}:j<\omega\}$,使得对每个 j,有 $S_{ij}\in V_{i+j}$.现在将$\{S_{ij}:j<\omega,i<\omega\}$重新排列成如下右图中的形式,得出一个新的序列 $S_{00},S_{01},S_{10},S_{20},\cdots$,我们把它记作$S(0)$.对这个 $S(0)$,有

(1) $S(0)\,\rho$ 收敛于点$\langle x_\alpha,k_0\rangle$.

(2) 对每个 μ,若$\langle x_\alpha,k_0\rangle\in \mathrm{Cl}_\rho S_\mu$,则 $S_\mu\cap S(0)$有无限多个点.



为了简单起见,把 $S(0)$仍记为$\{S_{0n}:n<\omega\}$.现在考虑 $k_1=\min(\Lambda-\{k_0\})$.与 k_0 时类似,可以作出一个序列 $S(1)=\{S_{1n}:n<\omega\}$,所不同的是在选择$\{S_{ij}:j<\omega,i<\omega\}$时,选出的点要与 $S(0)$中的点全不相同.由于 $S(0)\,\rho$ 收敛于$\langle x_\alpha,k_0\rangle$,这总是可以做到的.(当 $k_0=0$ 而 $k_1=1$ 的情形,则只需将 $S(0)$通过适当办法重新分成两个序列,使得 $\forall\,\mu_i<\alpha$,每个序列都包含$\{S_{ij}:j<\omega\}$无限个项即可.)依此类推,就可以对所有的 $k\in\Lambda$ 作出序列$S(k)=\{S_{kn}:n<\omega\}$,使得(1) $(k,n)\neq(j,m)\Rightarrow S_{kn}\neq S_{jm}$.(2) 对$\langle x_\alpha,k\rangle$的任一 ρ 邻域 U,$\{S_{kn}:n<\omega\}-U$ 是有限的,即 $S_{kn}\xrightarrow{\rho}\langle x_\alpha,k\rangle$.(3) $\forall\,\mu$,若$\langle x_\alpha,k\rangle\in \mathrm{Cl}_\rho S_\mu$,则 $S_\mu\cap\{S_{kn}:n<\omega\}$是无限的.注意$\{S_{kn}:k\in\Lambda,n<\omega\}$作为空间$(X_\alpha,\rho_\alpha)$的子集是闭离散集,所以

它关于(X_α, τ_α)也是闭离散集.由于(X_α, τ_α)的势是可数的,0维,第一可数局部紧空间,因而是可度量的0维局部紧空间.于是可以用紧开集族$\{B_{kn}: k \in \Lambda, n < \omega\}$来分离$\{S_{kn}: k \in \Lambda, n < \omega\}$,而且还可进一步假定,若$S_{kn}$属于$\langle x_\alpha, k\rangle$的局部基$\{V_i: i < \omega\}$的第一个$V_i$时,有$S_{kn} \in B_{kn} \subset V_i$.这样$\{B_{kn}: k \in \Lambda, n < \omega\}$就具有(a)~(d)所列的全部性质.

假设$\{B_{kn}: k \in \Lambda, n < \omega\}$已经选好,这时对每个$k \in \Lambda$,规定集$\{\langle x_\alpha, k\rangle\} \cup [\bigcup_{n > m} B_{kn}]$作为点$\langle x_\alpha, k\rangle$的第$m$个基本邻域.由它们构成$\langle x_\alpha, k\rangle$的一个局部基.这样就完成了$X_\beta = X_{\alpha+1}$上的拓扑$\tau_\beta$的构造,容易验证$\tau_\beta$仍是0维,局部紧$T_2$和第一可数的.

最后,我们定义X上的拓扑$\tau = \tau_{\omega_1}$,即由$\bigcup\{\tau_\alpha: \alpha < \omega_1\}$生成的拓扑. □

1.6.2 定理(CH) (X, τ)是一个0维,第一可数,局部紧的反Dowker空间和S空间.

证明 从X的构造可以看出,$\mathbf{R} \times \{0\}$和$\mathbf{R} \times \{1\}$都是τ闭集.再者,根据归纳条件(4).注意(X, ρ)的遗传可分性,可知对任何$A \subset X$,$|\mathrm{Cl}_\rho A - \mathrm{Cl}_\tau A| \leqslant \omega$.类似于§4关于Kunen线的论证,可知$(X, \tau)$是全的和遗传可分的.另外,如果只考虑开稠密子空间$X_0 = \mathbf{R} \times (\omega - \{1\})$和$X_1 = \mathbf{R} \times (\omega - \{0\})$,类似于Kunen线的论证,可以证明它们是全正规,因而是可数仿紧的.下面我们来证明(X, τ)是非正规的和可数仿紧的,并且不是Lindelöf的.

1. (X, τ)不是正规的.

设$U \in \tau$包含$\mathbf{R} \times \{0\}$.则$\mathbf{R} \times \{0\} \subset \mathrm{Cl}_\rho U$.由于$\rho$收敛于$\langle x, 0\rangle$的序列也$\rho$收敛于$\langle x, 1\rangle$,所以$\mathbf{R} \times \{1\} \subset \mathrm{Cl}_\rho U$.又由于$\mathrm{Cl}_\rho U - \mathrm{Cl}_\tau U$是可数的,所以$\mathrm{Cl}_\tau u$与$\mathbf{R} \times \{1\}$有不空的交.这就证明了$(x, \tau)$中的不相交闭集$\mathbf{R} \times \{0\}$和$\mathbf{R} \times \{1\}$是不可分离的.

2. (X, τ)是S空间.

假若(X, τ)是Lindelöf的.因为X是局部紧T_2,所以是正则的.而正则Lindelöf空间必定正规,而前面已证明(X, τ)不是正规的.

3. (X, τ)是可数仿紧的.

设 $\{F_n:n<\omega\}$ 是 (X,τ) 中的下降闭集序列，$\bigcap_n F_n=\varnothing$. 记 $K_n=F_n\cap X_0$，则 $\{K_n:n<\omega\}$ 是子空间 X_0 中的下降闭集序列，$K_n\downarrow\varnothing$. 由于 X_0 是可数仿紧的，存在开集序列 $\{W_n:n<\omega\}$，使 $K_n\subset W_n$，$W_{n+1}\subset W_n$，$\bigcap_n \mathrm{Cl}_{X_0}W_n=[\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau W_n]\cap X_0=\varnothing$. X_0 是开子空间，每个 W_n 也是 (X,τ) 中的开集. 对于每个 n，$\mathrm{Cl}_\rho W_n-\mathrm{Cl}_\tau W_n$ 是可数的. 于是

$$A=(\mathbf{R}\times\{0\})\cap(\bigcap_n[\mathrm{Cl}_\rho W_n-\mathrm{Cl}_\tau W_n])$$

是可数的. 记它为 $A=\{\langle x_m,0\rangle:m<\omega\}$.

由于 $\bigcap_n F_n=\varnothing$，对每个 m，可以确定 $n(m)$.

$$n(m)=\min\{i:\langle x_m,1\rangle\notin F_i,\ i\geqslant n(m-1)\}.$$

由 X 的正则性，存在 $\langle x_m,1\rangle$ 的一个邻域 H_m，使 $\mathrm{Cl}_\tau H_m\cap F_{n(m)}=\varnothing$. 令

$$V_n=W_n-\bigcup\{\mathrm{Cl}_\tau H_i:n(i)\leqslant n\},$$

则 V_n 是 (X,τ) 中的开集，$V_n\subset W_n$，并且 $\{V_n:n<\omega\}$ 是下降的. 又当 $n(i)\leqslant n$ 时，由 $\mathrm{Cl}_\tau H_i\cap F_{n(i)}=\varnothing$ 和 $F_n\subset F_{n(i)}$，可得 $K_n\subset V_n$.

今证明 $\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau V_n=\varnothing$. 注意 $\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau W_n$ 在 X_0 中没有交. 假若 $\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau V_n$ 包含有点，则此点必属于 $\mathbf{R}\times\{1\}$. 假设 $\langle x,1\rangle\in\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau V_n$. 则 $\langle x,1\rangle\in\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau W_n\subset\bigcap_n \mathrm{Cl}_\rho W_n$，此时也必有 $\langle x,0\rangle\in\bigcap_n \mathrm{Cl}_\rho W_n$. 但 $\langle x,0\rangle\notin\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau W_n$，所以存在 m，使 $\langle x,0\rangle=\langle x_m,0\rangle\in A$. 取 $n>n(m)$，则 H_m 为 $\langle x,1\rangle$ 的邻域，使 $\mathrm{Cl}_\tau H_m\cap V_n=\varnothing$，亦即 $\langle x_m,1\rangle\notin\mathrm{Cl}_\tau V_n$，与 $\langle x,1\rangle\in\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau V_n$ 矛盾. 所以只能有 $\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau V_n=\varnothing$.

记 $H_n=F_n\cap X_1$，则 $\{H_n:n<\omega\}$ 是 X_1 中的下降闭集列. $\bigcap_n H_n=\varnothing$. 按同样的论证可以找到 (X,τ) 中的下降开集序列 $\{U_n:n<\omega\}$，使 $H_n\subset U_n$，$\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau U_n=\varnothing$.

最后令 $W_n=U_n\cup V_n$. 则 $\{W_n:n<\omega\}$ 是 (X,τ) 中的下降开集序列，使 $F_n\subset W_n$. 注意

$$\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau W_n=\bigcap_n[\mathrm{Cl}_\tau U_n\cup\mathrm{Cl}_\tau V_n],$$

若点 $p\in\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau W_n$，则 p 属于无限个 $\mathrm{Cl}_\tau U_n$ 或 p 属于无限个 $\mathrm{Cl}_\tau V_n$. 由 $\{U_n:n<\omega\}$ 和 $\{V_n:n<\omega\}$ 都是单调下降序列，而 $\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau U_n=\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau V_n=$

$\varnothing$,这是不可能的.所以$\bigcap_n \mathrm{Cl}_\tau W_n = \varnothing$.

这就证明了(X,τ)的可数仿紧性. □

§7 $\mathscr{P}(\omega)$的一些特殊子集, Franklin-Rajagopalan 的 $\gamma\mathbf{N}$

ω 的所有子集的集 $\mathscr{P}(\omega)$可以分成两部分:$[\omega]^{<\omega}$,有时也记作 Fin,是全体有限子集的集;$[\omega]^{\omega}$,是全体无限子集的集.$[\omega]^{\omega}$在集论和拓扑学的研究中起着十分重要的作用,因而对$[\omega]^{\omega}$的组合论研究有着极为丰富和深刻的内容.这一节我们将介绍关于 $\mathscr{P}(\omega)$的一些基本概念和其中一些特殊子集,然后介绍 Franklin-Rajagopalan 利用 CH 作出的一个以 $\mathbf{N}$ 为稠子集的空间 $\gamma\mathbf{N}$.它是一个局部紧 T_2,第一可数,可数紧而非紧的空间[注意 LOTS(linear ordered topological space) ω_1 也有上述性质,但不是可分的,而 $\gamma\mathbf{N}$ 是可分的].最后我们介绍 van Douwen 应用 Hausdorff gap 构造的一个局部紧 T_2,可分,第一可数,可数仿紧非正规的空间.

1.7.1 定义 设 $A,B\in\mathscr{P}(\omega)$,称 A 几乎包含在 B 内,记作 $A\leqslant^* B$.如果 $A-B\in Fin$,记 $A=^* B$.如果 $A\leqslant^* B$和$B\leqslant^* A$同时成立,若 $A\leqslant^* B$而$A\neq^* B$,就记作 $A<^* B$. □

容易验证$\leqslant^*$是传递的而$=^*$是 $\mathscr{P}(\omega)$的一个等价关系.$A=^* B$当且仅当$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)\in Fin$,即 A 与B 的对称差是有限集.

注意 Fin 是完备 Boole 代数 $\mathscr{P}(\omega)$的一个理想.于是 $\mathscr{P}(\omega)$关于 Fin 可以产生一个商代数 $\mathscr{P}(\omega)/Fin$.(后面将会看到它不是完备的.因为它有 gap.)关系$\leqslant^*$可以顺理成章地转移成 $\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 上一个与之相符的半序.今后我们将用 0 表示 $\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 的零元,即 $0=\{A\in\mathscr{P}(\omega):A=^*\varnothing\}=Fin$.

1.7.2 定义 (1) $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(\omega)$称为一个塔(Tower),如果$\mathscr{A}$关于$<^*$的逆序,即$(\mathscr{A},>^*)$是一个正序集,并且 $\mathrm{Inf}\mathscr{A}=^*0$.

(2) $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(\omega)$称为有 sfip(强有限交性质),如果$\forall\mathscr{F}\in[\mathscr{A}]^{<\omega}$,

有 $\mathrm{Inf}\mathscr{F} > {}^*0$.

(3) $p = \min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\omega)$ 有 sfip,并且 $\mathrm{Inf}\mathscr{A} = {}^*0\}$(此处 $\mathrm{Inf}\mathscr{A} = {}^*0$ 仅表示 $\mathscr{A}$ 没有非 0 的下界,并不是指 $\mathscr{A}$ 一定有下确界).

$t = \min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\omega)$ 是一个塔$\}$. □

假如 p, t 确实是有意义的话,显然就有 $p \leqslant t \leqslant 2^\omega$. 下面我们来证明 p, t 确实是有意义的.

1.7.3 定理 p, t 是有意义的,并且 $p > \omega$. (Hausdorff)

证明 首先我们用归纳方式证明存在一个塔.

将 ω 分成两个不相交的无限集,取其中一个为 B_0. 设 $\forall \xi < \alpha$, $\{B_\xi : \xi < \alpha\}$ 已经选好,使它满足单调性条件(M): $\xi < \eta < \alpha \Rightarrow B_\eta <^* B_\xi$.

(1) 若 $\mathrm{Inf}\{B_\xi : \xi < \alpha\} = {}^*0$,则 $\{B_\xi : \xi < \alpha\}$ 就是一个塔.

(2) 若 $\mathrm{Inf}\{B_\xi : \xi < \alpha\} \neq {}^*0$,即它有一个非零下界 $C \in [\omega]^\omega$,使得 $\forall \xi < \alpha$ 有 $C <^* B_\xi$. 将 C 划分成两个无限集,取其中一个为 B_α,则 $\{B_\xi : \xi < \alpha + 1\}$ 仍满足条件(M). 因为 $|\mathscr{P}(\omega)| = 2^\omega$,所以此归纳过程将到某一步终结. 因此存在一个塔.

其次证明,若 $\mathscr{A}$ 有 sfip,并且 $\mathrm{Inf}\mathscr{A} = {}^*0$,则 $|\mathscr{A}| > \omega$. 如若不然,即若 $|\mathscr{A}| = \omega$,则存在 ω 到 $\mathscr{A}$ 上的一个一一映射 f. 记 $A_n = f(n)$, $a_0 = \min A_0 (= \min\{k : k \in A_0\})$, $a_1 = \min(A_0 \cap A_1 - \{a_0\})$, $\cdots$, $a_{n+1} = \min(A_0 \cap \cdots \cap A_{n+1} - \{a_0, \cdots, a_n\})$, $A = \{a_n : n < \omega\}$. 将 A 分成两个无限集,取其中一个为 C. 则 $\forall \xi < \omega$,设 $A_\xi = f(n)$,就有

$$C - A_\xi = C - A_n \subset A - A_n \subset \{a_0, \cdots, a_{n-1}\} \in Fin,$$

$$A_\xi - C = A_n - C \supset \{a_i : i \geqslant n\} - C \in [\omega]^\omega.$$

这说明 C 是 $\mathscr{A}$ 的一个非零下界,与 $\mathrm{Inf} A = {}^*0$ 矛盾. 所以 p, t 都有意义,并且 $p > \omega$. □

1.7.4 推论 若 CH 成立,则 $p = t = \omega_1$. □

1.7.5 定义 Franklin-Rajagopalan 空间 $\gamma\mathbf{N}$ 是指满足下列条件的一类空间:

(1) $\gamma\mathbf{N} = \mathbf{N} \cup \omega_1$ 是局部紧 T_2 的.

(2) $\mathbf{N}$ 是 $\gamma\mathbf{N}$ 中的开稠密集.

(3) 作为 $\gamma\mathbf{N}$ 的子空间, $\mathbf{N}$ 和 ω_1 分别同胚于离散空间 $\mathbf{N}$ 和 LOTS ω_1. □

下面我们来讨论 Franklin-Rajagopalan 空间的存在性.

1.7.6 定理 存在 Franklin-Rajagopalan 空间的充要条件是存在 $\mathscr{P}(\omega)$中一个 ω_1 序列$\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$,使得对所有的 $\alpha<\beta<\omega_1$ 有 $A_\alpha<^* A_\beta$.

证明 (1) 设$\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是 $<^*$ 上升的 ω_1 序列, $\gamma\mathbf{N}=\mathbf{N}\cup\omega_1$, 记 $A_{-1}=\varnothing$. 在 $\mathbf{N}\cup\omega_1$ 上定义一个拓扑如下:规定 $\mathbf{N}$ 的每个点都是孤立点. 对每个 n 和任意的$\beta<\alpha<\omega_1$, 记

$$U_n(\beta,\alpha]=(\beta,\alpha]\cup(A_\alpha-A_\beta-\{0,1,\cdots,n\}),$$

并规定取$\{U_n(\beta,\alpha]:n\in\mathbf{N},\beta<\alpha\}$为点 $\alpha\in\omega_1$ 的邻域基. 由此生成的 $\gamma\mathbf{N}$ 的拓扑容易验证具有下列性质:

① $\mathbf{N}$ 是 $\gamma\mathbf{N}$ 的开稠密集,因而 $\gamma\mathbf{N}$ 是可分的.

② $\forall\beta<\alpha<\omega_1, n\in\mathbf{N}, U_n(\beta,\alpha]$是 α 的势为可数的紧邻域,因而 $\gamma\mathbf{N}$ 是局部可数,局部紧 T_2 空间.

③ $\mathbf{N}$ 和 ω_1 分别同胚于离散空间 $\mathbf{N}$ 和 LOTS ω_1.

④ 因为 ω_1 是 $\gamma\mathbf{N}$ 的闭子空间,所以 $\gamma\mathbf{N}$ 不是 Lindelöf 空间.

(2) 反之,假如 $\gamma\mathbf{N}=\mathbf{N}\cup\omega_1$ 是一个 Franklin-Rajagopalan 空间. 这时,对每个 $\alpha<\omega_1$, $[0,\alpha)$是与$[\alpha+1,\omega_1)$不相交的一个紧集. 于是存在不相交的开集 U_α 和 V_α 分离它们. 由于 $\gamma\mathbf{N}$ 是局部紧和 0 维的,因此不妨假设 U_α 也是包含$[0,\alpha]$的一个紧开集. 令 $A_\alpha=U_\alpha\cap\mathbf{N}$. 当 $\alpha<\beta$ 时, $U_\beta-U_\alpha$ 是包含点$\alpha+1$ 的开集. 由 $\mathbf{N}$ 的稠密性, $\alpha+1$ 不能是 $\gamma\mathbf{N}$ 的孤立点,所以 $A_\beta-A_\alpha=(U_\beta-U_\alpha)\cap\mathbf{N}\in[\omega]^\omega$. 又因为$[0,\alpha]\subset[0,\beta]\subset U_\beta$,所以 $U_\alpha-U_\beta\subset\mathbf{N}$. 但 $U_\alpha-U_\beta$ 是紧集,故有 $U_\alpha-U_\beta=A_\beta-A_\alpha\in[\omega]^{<\omega}$. 这便证明了 $A_\alpha<^*A_\beta$,即$\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是一个 $<^*$ 上升的 ω_1 序列. □

由前面的讨论知道存在有 $<^*$ 下降的 ω_1 序列$\{B_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 取 $A_\alpha=\omega-B_\alpha$,则$\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是 $<^*$ 上升序列. 所以 $\gamma\mathbf{N}$ 一定是存在的.

现在我们来看一看, $\gamma\mathbf{N}$ 在什么情况下能够成为可数紧的空间. 注意子空间 ω_1 已经是可数紧的,所以要使 $\gamma\mathbf{N}$ 成为可数紧的,当且仅当

$\mathbf{N}$ 中的任何无限子集在 ω_1 中都有聚点.这就要求上述定理中的 $<^*$ 上升序列具有某种特殊性质.具体地说,就是要求 $\mathscr{A}=\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 没有任何一个不等价于 $\mathbf{N}$ 的上界.一方面,假如 $\mathscr{A}$ 有一个上界 $A\neq^*\mathbf{N}$.则 $D=\mathbf{N}-A\in[\omega]^\omega$.这时对每个 α,由 $A_\alpha<^*A$ 可知,对任何 $\beta<\alpha$,存在 $n\in\mathbf{N}$,使 $U_n(\beta,\alpha]\cap D=\varnothing$.于是 D 是 $\gamma\mathbf{N}$ 的一个无限闭离散集,$\gamma\mathbf{N}$ 不是可数紧的.另一方面,若 $\mathscr{A}$ 没有不等价于 $\mathbf{N}$ 的上界,则对任何 $A\in[\mathbf{N}]^\omega$,存在 $\alpha<\omega_1$,使 $A_\alpha\leqslant^*\mathbf{N}-A$ 不成立.于是 $A_\alpha\cap A=A_\alpha-(\mathbf{N}-A)\notin Fin$.设 α 是使 $A_\alpha\cap A\in[\omega]^\omega$ 的最小序数.这时对任何 $\beta<\alpha,n\in\mathbf{N}$,有

$$\begin{aligned}U_n(\beta,\alpha]\cap A&=[(\beta,\alpha]\cup(A_\alpha-A_\beta)-\{0,1,\cdots,n\}]\cap A\\&=(A_\alpha\cap A)-(A_\beta\cap A)-\{0,1,\cdots,n\}\cap A\in[\mathbf{N}]^\omega,\end{aligned}$$

于是 α 是 A 的聚点.这就证明了 $\gamma\mathbf{N}$ 是可数紧的.

由上述讨论我们可以得到

1.7.7 定理 存在可数紧的 Franklin-Rajagopalan 空间的充要条件是 $t=\omega_1$.

特别地,CH⇒存在可数紧非紧的 Franklin-Rajagopalan 空间. □

下面我们介绍 Hausdorff gap 的概念和 van Douwen 的例子.

1.7.8 定义 所谓 Hausdorff gap 指的是 $\mathscr{P}(\omega)$ 中一对满足下列条件的 ω_1 序列 $\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 和 $\{B_\alpha:\alpha<\omega_1\}$:

(1) $\forall\alpha,\beta$ 有 $A_\alpha<^*B_\beta$.

(2) $\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 $<^*$ 上升的;$\{B_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 $<^*$ 下降的.

(3) 不存在 $S\in\mathscr{P}(\omega)$,使得 $\forall\alpha,A_\alpha<^*S<^*B_\alpha$. □

条件(1)和(2)表明 $\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}\cup\{B_\alpha:\alpha<\omega\}$ 是全序的.而条件(3)恰好显示了 gap 的含义.

如果记 $A(0,\alpha)=A_\alpha,A(1,\alpha)=\omega-B_\alpha$,那么上述条件(1)~(3)也等价于序列 $\{A(i,\alpha):\alpha<\omega_1,I=0,1\}$ 满足:(1) $\forall\alpha<\beta$,有 $A(i,\alpha)<A(i,\beta)$;(2) $\forall\alpha,\beta$,有 $A(0,\alpha)\cap A(1,\beta)\in Fin$;(3) 不存在 $S\in\mathscr{P}(\omega)$ 使得 $\forall\alpha,A(0,\alpha)<^*S,A(1,\alpha)\cap S\in Fin$.

1.7.9 定理 存在 Hausdorff gap.(Hausdorff) □

这个定理可以在 ZFC 中证明.但由于论证较长,在此略去,有兴趣的读者可以参看 van Douwen[1976]中的定理 4.3.此处引用主要是用来证明下面的定理.

1.7.10 定理 存在一个可分的,第一可数,可数仿紧,0 维局部紧 T_2 的非正规空间.(van Douwen[1976])

证明 设 $\{A(i,\alpha):\alpha<\omega_1, i=0,1\}$ 是一个 Hausdorff gap.记 $L_0=\{0\}\times\omega_1, L_1=\{1\}\times\omega_1, X=\omega\cup L_0\cup L_1$.给出 X 的一个拓扑如下:规定 ω 中的点为孤立点.而对于点 (i,α),则规定形如

$B(i,\alpha,\beta,F)=\{(i,\xi):\beta<\xi\leqslant\alpha\}\cup(A(i,\alpha)-A(i,\beta)-F)$(其中 $\beta<\alpha, F\in Fin$)

作为 (i,α) 的邻域基.

如定理 1.7.6 所作,不难验证这样作出的 X 是一个可分,局部紧 T_2,局部可数的空间,其子空间 $\omega\cup L_0,\omega\cup L_1$ 是与 $\gamma\mathbf{N}$ 同胚的.

现在证明 X 是可数仿紧的.设 $\mathscr{G}=\{G_n:n<\omega\}$ 是 X 的一个可数开覆盖.注意 L_0, L_1 是 X 的可数紧闭子集.故存在 n,使 $L_0\cup L_1\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_i$.于是 $\{G_i:i\leqslant n\}\cup\{\{m\}:m\in\omega-\bigcup_{i=1}^{n}G_i\}$ 就是 $\mathscr{G}$ 的局部有限开加细.

为了证明 X 不是正规的,只需指出 L_0 与 L_1 是不能分离的闭子集.假如存在包含 L_0 和 L_1 的不相交的开集 U_0 和 U_1,这时对任何 α, $0<\alpha<\omega_1$,存在 $f(\alpha)<\alpha$ 和 $F(\alpha)\in Fin$,使 $B(i,\alpha,f(\alpha),F(\alpha))\subset U_i$ $(i=0,1)$.由 Pressing down 引理(证明见 4.3.5),存在 $\kappa<\omega_1$,使得集 $K=f^{-1}(\kappa)$ 与 ω_1 共尾.现在对 $i=0,1$,定义

$$S_i=[A(i,\kappa)\cup(\omega\cap U_i)]-A(1-i,\kappa).$$

由于 $U_0\cap U_1=\varnothing$,可得 $S_0\cap S_1=\varnothing$.对 $i=0,1$ 和任意的 $\alpha<\omega_1$,存在 $\beta\in K,\beta>\alpha$.这时 $A(i,\alpha)<^* A(i,\beta)$.但 $f(\beta)=\kappa$,所以

$$[A(i,\beta)-A(i,\kappa)]-F(\beta)=B(i,\beta,f(\beta),F(\beta))\cap\omega\subset\omega\cap U_i,$$

从而有 $A(i,\beta)<^* A(i,k)\cup(\omega\cap U_i)$.因为 $A(i,\alpha)\cap A(1-i,k)\in Fin$,所以得出 $A(i,\alpha)<^* S_i$ 对任何 $\alpha<\omega_1$ 和 $i=0,1$ 成立.然而 $S_0\cap S_1=\varnothing$,这就与 Hausdorff gap 的条件(3)相矛盾. □

§8 ↑、↓及由它们构成的 S 空间与 L 空间

在§2～§4我们介绍过 S 和 L 问题以及用CH构造 S 空间和 L 空间的一些方法. 这一节我们进一步介绍 van Douwen 和 Kunen 运用 CH 在 $\mathscr{P}(\omega)$ 中构造 S 空间及 L 空间的一种技巧. 这个方法的特点是先由 CH 推出两个关于 $\mathscr{P}(\omega)$ 的组合命题, 即↑和↓, 然后再从 $\mathscr{P}(\omega)$ 的 Vietoris拓扑空间中找出所需的子空间.

1.8.1 定义 (1) ↑指的是如下命题:

$\exists\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset\mathscr{P}(\omega)$, 使得

① $\alpha<\beta\Rightarrow x_\beta<^* x_\alpha$.

② $\forall I\in[\omega_1]^{\omega_1}$, $\exists\alpha,\beta\in I,\alpha\neq\beta$, 使 $x_\beta\subseteq x_\alpha$.

(2) ↓指的是如下命题:

$\exists\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset\mathscr{P}(\omega)$, 使得

① $\alpha<\omega\Rightarrow x_\alpha\not\subseteq x_\beta$.

② $\forall I\in[\omega_1]^{\omega_1}$, $\exists\alpha,\beta\in I,\alpha\neq\beta$, 使 $x_\beta\subseteq x_\alpha$.

满足上述命题的 ω_1 序列 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 分别称为↑序列和↓序列. □

上述关于↑的定义中, (1)表明 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 $<^*$ 下降序列. 在§7中已经看到, 仅仅满足 $<^*$ 下降条件的 ω_1 序列在 ZFC 中就能存在. 但是要求同时满足(2)的序列的存在性就不是在 ZFC 中能解决的. 本节将证明 CH 蕴涵它们的存在性. 同时我们指出, 在 MA+¬CH下, 这样的序列是不存在的(见 van Douwen, Kunen[1982]).

若 $x_\beta<^* x_\alpha$, 则 $x_\alpha-x_\beta$ 是无限集, 因而 $x_\alpha\subseteq x_\beta$ 不能成立. 这便说明了↑⇒↓.

1.8.2 定理 CH⇒↑.

证明 我们把 ω 的每个子集对应于它的特征函数, 这样建立起 $\mathscr{P}(\omega)$ 与 $2^\omega=\{f:\mathrm{dom}f=\omega,\mathrm{ran}f\subset\{0,1\}\}$ 的一个一一对应. 当 2^ω 赋以离散空间 $\{0,1\}$ 的积拓扑时, 它是一个紧的, 0维度量空间. 实际上它同胚于 Cantor 集. 这个拓扑可以自然地转移成 $\mathscr{P}(\omega)$ 的拓扑, 称之为

$\mathscr{P}(\omega)$的 Cantor 拓扑. 注意 $x \in \mathscr{P}(\omega)$有如下形式的局部邻域基:

$$B(x,k)=\{y \in \mathscr{P}(\omega): x \cap k = y \cap k\} \ (k \in \omega).$$

ω_1 的全体可数子集的集$[\omega_1]^{\leqslant\omega}$具有势$c=2^{\omega}$. 类似于 §4 中1.4.1所作的推证. 我们可以将$[\omega_1]^{\leqslant\omega}$排成一个$\omega_1$ 序列$\{I_\eta: \eta<\omega_1\}$, 使得对任何 η, 有 $I_\eta \subset \eta$. 现在对每个$0<\beta<\omega_1$, 取定一个 ω 到β 上的映射φ_β. 用归纳方式定义序列$\{x_\alpha: \alpha<\omega_1\}$如下:

$x_0=\omega$.

假设对所有 $\alpha<\beta$, x_α 均已作出, 并且满足下述归纳条件: $\forall \alpha<\gamma<\beta$, 有 $x_\gamma <^* x_\alpha$.

现在我们要选择 x_β, 使它满足:

(1) $\forall \alpha<\beta, x_\beta <^* x_\alpha$.

(2) 若 $\eta<\beta$, 并且 $x_\beta \in \mathrm{Cl}\{x_\alpha: \alpha \in I_\eta\}$, 则存在 $\alpha \in I_\eta$, 使 $x_\beta \subset x_\alpha$.

下面证明这种 x_β 是可以选出的. 首先, 由于 $t>\omega$, 一定可以找到一个 $S \in [\omega]^\omega$, 使 $S <^* x_\alpha$ 对所有$\alpha<\beta$成立. 我们用归纳方式作出 $x_\beta=\{k_n: n<\omega\} \subset S$. 任取 $k_0 \in S$. 在 $k_0, \cdots, k_n$ 选好后, 任取 $k_{n+1} \in S \cap b_0 \cap \cdots \cap b_n$, 使 k_{n+1}大于 $k_0, \cdots, k_n$, 其中 b_n 按如下情况选择: 固定 $\eta=\varphi_\beta(n)$.

情况 1: $\exists \alpha \in I_\eta$, 使 $x_\alpha \cap (k_n+1)=\{k_0, \cdots, k_n\}$. 这意味着我们将要作出的 $x_\beta \in B(x_\alpha, k_n+1)$. 这时, 选 $b_n=x_\alpha$, 然后我们再选择 k_{n+1}, $k_{n+2}, \cdots$.

情况 2: $\forall \alpha \in I_\eta, x_\alpha \cap (k_n+1) \neq \{k_0, \cdots, k_n\}$.

这表明我们将要作出的 x_β 有 $x_\alpha \overline{\in} B(x_\beta, k_n+1) (\forall \alpha \in I_\eta)$, 亦即 $x_\beta \overline{\in} \mathrm{Cl}(\{x_\alpha: \alpha \in I_\eta\})$. 这时选 $b_n=x_0$. 然后再选择 $k_{n+1}, \cdots$.

这样我们完成了整个归纳过程, 得到序列$\{x_\alpha: \alpha<\omega_1\}$. 余下的是要证明它是一个 ↑ 序列. 由 $x_\beta <^* S$, 条件(1)显然是满足的. 设 $I \in [\omega_1]^{\omega_1}$. 考虑$\{x_\alpha: \alpha \in I\}$. 因为$\mathscr{P}(\omega)$遗传可分, 存在一个 $I_\eta \subset I$, 使$\{x_\alpha: \alpha \in I_\eta\}$是$\{x_\alpha: \alpha \in I\}$中的稠密集. 固定 $\beta>\eta$. 因为 $x_\beta \in \mathrm{Cl}(\{x_\alpha: \alpha \in I_\eta\})$. 由归纳条件(2), 存在 $\alpha \in I_\eta$, 使 $x_\beta \subset x_\alpha$. 于是 ↑ 序列的条件(2)也满足. □

现在我们给 $\mathscr{P}(\omega)$赋以另外一种拓扑,即 Vietoris 拓扑. 它是按如下方式构成的:

对每个 $x\in\mathscr{P}(\omega)$,取形如

$$[f,x]=\{s:f\subset s\subset x\}$$

的集(其中 $f\in[\omega]^{<\omega}$)作为 x 的邻域基.

容易验证这样生成的拓扑是第一可数和 T_2 的,并且每个$[f,x]$都是又开又闭的,因而是 0 维拓扑. 另外,对任何 x 和 $k\in\omega$,$[x\cap k,x]=[\varnothing,x]\cap B(x,k)\subset B(x,k)$. 所以 $\mathscr{P}(\omega)$的 Vietoris 拓扑要比 Cantor 拓扑细.

下面我们再介绍左分离序列和右分离序列的概念.

1.8.3 定义 设 X 是一个拓扑空间. $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是 X 中的一个 ω_1 序列. 如果

(1) $\forall\alpha<\omega_1, x_\alpha\notin\{x_\xi:\xi<\alpha\}^-$,就称$\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是一个左分离序列.

(2) $\forall\alpha<\omega_1, x_\alpha\notin\{x_\xi:\xi>\alpha\}^-$,就称$\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是一个右分离序列. □

上述定义实际上等价于对任何 α,$\{x_\xi:\xi<\alpha\}$是子空间$\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$中的闭集(左分离情形)或开集(右分离情形). 而且,X 不是遗传可分(遗传 Lindelöf)的充分必要条件是它包含有一个左(右)分离序列. 显然,一个 ω_1 序列如果既是左分离,又是右分离的,则它一定是 X 的离散子空间.

1.8.4 定理 设 $\mathscr{P}(\omega)$赋以 Vietoris 拓扑. 则下列命题等价:

(1) $\downarrow$成立.

(2) $\mathscr{P}(\omega)$有一个 L 子空间.

(3) $\mathscr{P}(\omega)$有一个 S 子空间. (van Douwen, Kunen[1982])

证明 先证(1)⇒(2). 设$\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是一个$\downarrow$序列,今证 $L=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是一个 L 空间. 由$\downarrow$的条件(1),当 $\alpha<\beta$ 时,$x_\alpha\notin[\varnothing,x_\beta]$,于是$\{x_\alpha:\alpha<\beta\}$是 L 的闭子集. 因此 L 是左分离的,即不是遗传可分的. 假若 L 不是遗传 Lindelöf 的,则存在 $J\in[\omega_1]^{\omega_1}$,使得子序列$\{x_\alpha:\alpha\in J\}$是右分离的,从而是 L 的一个离散子空间. 对每个 $\beta\in J$,取 $f_\beta\in[x_\beta]^{<\omega}$.

使得当 $\alpha,\beta\in J,\alpha\neq\beta$ 时，有 $x_\alpha\in[f_\beta,x_\beta]$. 这时根据 $|[\omega]^{<\omega}|=\omega$ 及鸽笼原理，存在 $f\in[\omega]^{<\omega}$ 及 $I\in[J]^{\omega_1}$，使得对所有 $\alpha,\beta\in I,f_\alpha=f_\beta=f$. 于是 $x_\alpha\not\subseteq x_\beta$ 和 $x_\beta\not\subseteq x_\alpha$ 同时成立，这与 $\downarrow$ 的条件(2)矛盾. 因此 L 是一个 L 空间.

再证(2)⇒(1). 若 $\mathscr{P}(\omega)$ 有一个 L 子空间 L，则存在左分离序列 $X=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset L$，使得 X 没有不可数的离散子空间(因为 L 是遗传 Lindelöf 的). 对每个 β，因为 $x_\beta\in\{x_\xi:\xi<\beta\}^-$，所以存在 $f_\beta\in[x_\beta]^{<\omega}$，使 $[f_\beta,x_\beta]\cap\{x_\xi:\xi<\beta\}=\varnothing$，即当 $\alpha<\beta$ 时，有 $x_\alpha\in[f_\beta,x_\beta]$. 再次应用鸽笼原理，存在 $J\in[\omega_1]^{\omega_1}$ 和 $f\in[\omega]^{<\omega}$，使得对所有 $\alpha\in J$，有 $f_\alpha=f$. 将 $\{x_\xi:\xi\in J\}$ 再次排成 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 的形式，所得的序列就是一个 $\downarrow$ 序列. 证明如下：当 $\alpha<\beta$ 时，由 $x_\alpha\in[f,x_\beta]$ 及 $f\subset x_\alpha$，可知 $x_\alpha\subseteq x_\beta$ 是不能成立的，所以 $\downarrow$ 的条件(1)满足. 另一方面，对任何 $I\in[\omega_1]^{\omega_1}$，$\{x_\xi:\xi\in I\}$ 一定在 $\{x_\xi:\xi<\omega_1\}$ 中有聚点. 设此聚点为 x_β. 这时一定有 $\alpha\in I,\alpha\neq\beta$，使 $x_\alpha\in[f,x_\beta]$. 于是 $x_\alpha\subset x_\beta$. $\downarrow$ 的条件(2)也满足.

然后证(1)⇒(3). 设 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 为 $\downarrow$ 序列，令 $y_\alpha=\omega-x_\alpha$. $S=\{y_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 通过类似于(1)⇒(2)的论证，可以证明 S 是一个 S 空间.

最后，(3)⇒(1). 与证明(2)⇒(1)类似，由(3)可以推出(1). □

§9 在研究 ω^* 中的某些应用

对于一个完全正则空间 X，它的 Stone-Čech 紧化 βX 可以通过 $Z(X)$(X 的全体零集之集)上的超滤(ultrafilter，缩写为 uft)构造出来. 当 X 是离散空间时，$Z(X)=\mathscr{P}(X)$. 这时 βX 的拓扑性质实质上完全取决于 $\mathscr{P}(X)$ 的集论性质. 所以不难想象像 CH 之类的集论命题将会成为研究 $\beta\omega$ 的有力工具. 限于篇幅，这一节我们仅限于介绍一些最基本的结果. 首先讨论 Boole 代数 $\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 的一些性质. 在此基础上介绍 Parovičenko 的结果. 在 CH 下，这个结果给出了 $\omega^*=\beta\omega-\omega$ 的一个本征刻画. 然后我们给出在 CH 下，ω^* 中 P 点的存在性证明. 最后利用 P 点证明存在伪紧，可数 meso 紧而不是可数仿紧的空间.

1.9.1 定义 设$\boldsymbol{B}$是一个 Boole 代数. $\boldsymbol{B}$的 Stone 空间 $S(\boldsymbol{B})$是指$\boldsymbol{B}$上全体 uft 的集,同时取$\{B^*:B\in\boldsymbol{B}\}$作为基构成的拓扑空间. 此处 $B^*=\{p:p$ 是$\boldsymbol{B}$上的 uft,满足 $B\in p\}$. □

容易验证,映射 $B\to B^*$具有如下性质:(1) $(A\wedge B)^*=A^*\cap B^*$. (2) $S(\boldsymbol{B})-B^*=(B')^*$(其中 B'表示B 的补元). 因此,$\{B^*:B\in\boldsymbol{B}\}$对于取交和取余集的运算也构成一个 Boole 代数,而且 $B\to B^*$是一个同构映射.

在上述定义下,$S(\boldsymbol{B})$是一个 0 维的紧 T_2 空间. 每个 B^*都是开闭集. 若$\boldsymbol{B}$是σ-完备的,则 $S(\boldsymbol{B})$是基本不连通的(basically disconnected),即每个余零集有开的闭包. 若$\boldsymbol{B}$是完备的 Boole 代数,则 $S(\boldsymbol{B})$是极不连通的(extremly disconnected)(证明可参看 1.11.4).

在 §7 中我们曾指出$\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 是一个 Boole 代数. 设 π 是$\mathscr{P}(\omega)\to\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 上的典范投影,则 $\pi(A)=\pi(B)$当且仅当 $A=^*B$,即 $A\Delta B\in Fin$. 注意 π 是 Boole 代数$(\mathscr{P}(\omega),\subseteq)$到 Boole 代数$(\mathscr{P}(\omega)/Fin,\leqslant^*)$上的一个同态. 为了简单起见,在后面的论述中我们将用符号"$\leqslant$"代替符号"$\leqslant^*$",并记$0=\pi(\varnothing)$,$1=\pi(\omega)$.

1.9.2 定理 Boole 代数$\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 的 Stone 空间与 $\omega^*=\beta\omega-\omega$ 是同胚的.

证明 映射 $\pi:\mathscr{P}(\omega)\to\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 满足$A\subseteq B\Rightarrow\pi(A)\leqslant\pi(B)$, $\pi(A\cap B)=\pi(A)\wedge\pi(B)$, $\pi(\omega-A)=\pi(A)'$. 现在,设 $p\in\omega^*$,定义 $\tilde{p}=\varphi(p)=\{\pi(A):A\in p\}$. 注意对每个 $J\in Fin$,有 $\pi(J)=0$. 为了使$0\notin\tilde{p}$,只需 p 不包含任何有限集. 由于 p 是ω 上的自由超滤,这一点自然是满足的. 通过例行的验证,可以知道$\tilde{p}$确实是$\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 上的一个 uft. 反过来,对$\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 上任何一个 uft S,定义 $p=\{A\in\mathscr{P}(\omega):\pi(A)=S\}$,也可以验证 p 是ω 上一个 uft. 又由 $0\notin S$ 可知p 是自由的,并且$\tilde{p}=\varphi(p)$恰好就是 S,这说明 φ 是个满射. 若 $p\neq q$,则存在 $A\in p$, $B\in q$,使 $A\cap B=\varnothing$,于是 $\pi(A)\wedge\pi(B)=0$. 然而 $\pi(A)\in\tilde{p}$, $\pi(B)\in\tilde{q}$,所以$\tilde{p}\neq\tilde{q}$. 于是 φ 是ω^*到 $S(\mathscr{P}(\omega)/Fin)$之上的一一对

应.根据定义,ω^*有形如$\{A^* \cap \omega^*; A \in \mathscr{P}(\omega)\}$的基.而$S(\mathscr{P}(\omega)/Fin)$有形如$\{a^*; a \in \mathscr{P}(\omega)/Fin\}$的基.设$p \in \omega^*$,$a^*$是$\tilde{p} = \varphi(p)$的一个邻域,则有$\tilde{p} \in a^*$,即$a \in \tilde{p}$.设$a = \pi(A)$.由$\pi(A) \in \tilde{p}$,得$A \in p$,即$p \in A^*$.于是$A^* \cap \omega^*$是$p$的一个邻域,而且对任何$q \in A^* \cap \omega^*$,$q \in A^* \Rightarrow A \in q \Rightarrow a = \pi(A) \in \tilde{q} \Rightarrow q \in a^*$.所以$\varphi$是连续映射.$\omega^*$是紧$T_2$空间,$\varphi$是一一连续满射,这样$\varphi$就是一个同胚映射. □

1.9.3 定义 设$\boldsymbol{B}$是一个Boole代数,$F \subset \boldsymbol{B}$,$G \subset \boldsymbol{B}$.

(1) $F < G$表示$\forall A \in [F]^{<\omega}, B \in [G]^{<\omega}$,有$\bigvee A < \bigwedge B$.

(2) 称$\boldsymbol{B}$满足条件H_ω,如果

$\forall F \in [\boldsymbol{B} - \{1\}]^{\leqslant \omega}, G \in [\boldsymbol{B} - \{0\}]^{\leqslant \omega}$,若$F < G$,则$\exists x \in \boldsymbol{B}$,使$F < \{x\} < G$. □

1.9.4 定理 $\mathscr{P}(\omega)/Fin$满足条件H_ω.

证明 设F, G是如条件H_ω的前提所述的$\boldsymbol{B}$两个子集,$F = \{f_n : n < \omega\}$,$G = \{g_n : n < \omega\}$.不失普遍性,可假定对每个n,有$f_n \leqslant f_{n+1}$,$g_{n+1} \leqslant g_n$(否则用$\{\bigvee_{i=0}^{n} f_i : n < \omega\}$和$\{\bigwedge_{i=0}^{n} g_i : n < \omega\}$来代替原先的$F, G$).又设$\pi(A_n) = f_n, \pi(B_n) = g_n$,并且对每个$n$,有$A_n \subset A_{n+1}, B_{n+1} \subset B_n$.因为对任何$m, n$,有$g_n = \bigwedge_{i=0}^{n} g_i > \bigvee_{i=1}^{m} f_i = f_m$,所以$B_n - A_m \in [\omega]^\omega$.归纳地取

$$d_0 \in B_0 - A_0, c_0 \in B_0 - A_0 - \{d_0\},$$

$$d_n \in B_n - (A_n \cup \{d_0, \cdots, d_{n-1}\} \cup \{c_0, \cdots, c_{n-1}\}),$$

$$c_n \in B_n - (A_n \cup \{d_0, \cdots, d_n\} \cup \{c_0, \cdots, c_{n-1}\}).$$

并记 $D = \{d_n : n < \omega\}, \quad C = \{c_n : n < \omega\}$,

$$A = \bigcup_n (A_n \cap B_n) - C,$$

$$X = A \cup D, \ x = \pi(X).$$

则对所有n

(1) $A_n - X \subset A_n - A \subset A_n - [(A_n \cap B_n) - C]$
$= (A_n - B_n) \cup (A_n \cap C) = A_n - B_n \in Fin.$

(2) $X - A_n \supset D - A_n = \{d_{n+1}, d_{n+2}, \cdots\} \in [\omega]^\omega$.

(3) $X - B_n = (A - B_n) \cup (D - B_n) \subset [\bigcup_{k<n}(A_k - B_k)] \cup \{d_0, \cdots, d_{n-1}\} \in Fin$.

(4) $B_n - X = (B_n - A) \cap (B_n - D) \supset (B_n - A) \cap C$
$= [B_n - (\bigcup_{k<\omega}(A_k \cap B_k) - C)] \cap C$
$\supset B_n \cap C = \{c_{n+1}, c_{n+2}, \cdots\} \in [\omega]^\omega$.

综合(1)～(4)，便得 $F < \{x\} < G$. □

1.9.5 定义 设$\boldsymbol{B}$是一个 Boole 代数. 称$\boldsymbol{B}$满足条件 R_ω，如果对任意的 $F \in [\boldsymbol{B} - \{1\}]^{\leqslant\omega}$，$G \in [\boldsymbol{B} - \{0\}]^{\leqslant\omega}$和$H \in [\boldsymbol{B}]^{\leqslant\omega}$，当它们满足

(1) $F < G$.

(2) $\forall \tilde{F} \in [F]^{<\omega}, \tilde{G} \in [G]^{<\omega}, h \in H$，都有 $h \not\leqslant \vee \tilde{F}, h \not\geqslant \wedge G$ 时，一定存在 $x \in \boldsymbol{B}$，使 $F < \{x\} < G$，并且 $\forall h \in h, h \not\leqslant x, x \not\leqslant h$. □

1.9.6 引理 若 Boole 代数$\boldsymbol{B}$满足条件H_ω，则$\boldsymbol{B}$也满足条件R_ω.

证明 设 $F = \{f_n : n < \omega\}$，$G = \{g_n : n < \omega\}$，$H = \{h_n : n < \omega\}$，它们满足条件 R_ω 的前提.

对任意的 $h_n \in H$ 和$\tilde{F} \in [F]^{<\omega}$，因为 $h_n \not\leqslant \vee \tilde{F}$，所以$(\vee \tilde{F})' \wedge h_n \neq 0$，即$\wedge\{f' \wedge h_n : f \in \tilde{F}\} > 0$. 于是$\{0\} < \{f' \wedge h_n : f \in \tilde{F}\}$. 由条件 H_ω，存在 d_n，使 $d_n > 0$，同时对所有 $f \in F$，$d_n < f' \wedge h_n$. 从而 $d_n < f'$，即 $f < d'_n$ 和 $d_n < h_n$. 另一方面，对任意的 $g \in G, h \in H$，因为 $h \not\geqslant g$，所以 $g \wedge h' > 0$. 记 $S = \{g \wedge h' : g \in G, h \in H\}$. 显然 $S \in [\boldsymbol{B} - \{0\}]^{\leqslant\omega}$，并且$\{0\} < S$. 由条件 H_ω，存在 e，使$\{0\} < \{e\} < S$，即 $e > 0$，并且对所有 $g \in G$，$h \in H$，有 $e < g, e < h'$.

现在，对每个 n，令 $\hat{f}_n = f_n \vee e$，$\hat{g}_n = g_n \wedge d'_n$. 于是对任何 i, j，由 $f_i < g_j$ 和$f_i < d'_j$，得 $f_i < \hat{g}_j$. 又由 $e < g_j$ 和 $e < h'_j < d'_j$，得 $e < \hat{g}_j$. 故有 $\hat{f}_i < \hat{g}_j$，从而 $\bigvee_{i\leqslant m} \hat{f}_i < \bigwedge_{j\leqslant n} \hat{g}_j$ 对任何 m, n 成立. 应用条件 H_ω，可知存在 $x \in \boldsymbol{B}$，使$\{\hat{f}_n : n < \omega\} < \{x\} < \{\hat{g}_n : n < \omega\}$. 今证明 x 即为所求. 对每个 $h_n \in H$，假如 $x \leqslant h_n$，那么由 $e \leqslant \hat{f}_n = f_n \vee e \leqslant x$，可得 $e \leqslant x$，从而 $e \leqslant h_n$. 但是 $e \leqslant h'_n$，于是 $e \leqslant h_n \wedge h'_n = 0$. 这与 $e > 0$ 矛盾. 假如 $h_n \leqslant x$，那么由 $d_n < h_n$，可得 $d_n < x$. 但 $x \leqslant d'_n$，于是 $d_n < d'_n$. 这也是不可能的. □

1.9.7 引理 设$\boldsymbol{B}$是一个 Boole 代数，满足条件 H_ω，则存在 $F =$

$\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 和 $G = \{g_\alpha : \alpha < \omega_1\}$，使得 F 单调上升，G 单调下降，并且 $F < G$.

证明 我们将用归纳方式作出 F, G. 令 $F_0 = \{0\}, G_0 = \{1\}$. 易见存在 $f_1, g_1 \in \boldsymbol{B}$，使 $F_0 < \{f_1\} < \{g_1\} < G_0$. 令 $F_1 = F_0 \cup \{f_1\}, G_1 = G_0 \cup \{g_1\}$. 假设对所有 $\beta < \alpha$ 已经作出 F_β, G_β，使它们满足：(1) $F_\beta < G_\beta$. (2) F_β 单调上升，G_β 单调下降. (3) F_β, G_β 是可数的，并且 $\gamma < \beta \Rightarrow F_\gamma \subset F_\beta, G_\gamma \subset G_\beta$. 现在来作 F_α, G_α. 若 α 是极限序数，则令 $F_\alpha = \bigcup\{F_\beta : \beta < \alpha\}, G_\alpha = \bigcup\{G_\beta : \beta < \alpha\}$. 若 $\alpha = \beta + 1$，则由 $F_\beta < G_\beta$，用条件 H_ω 可以找到 f_α 和 g_α，使 $F_\beta < \{f_\alpha\} < \{g_\alpha\} < G_\beta$. 令 $F_\alpha = F_\beta \cup \{f_\alpha\}, G_\alpha = G_\beta \cup \{g_\alpha\}$，则 $\{F_\beta : \beta \leqslant \alpha\}, \{G_\beta : \beta \leqslant \alpha\}$ 仍满足条件(1)～(3). 最后令 $F = \bigcup\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}, G = \bigcup\{G_\alpha : \alpha < \omega_1\}$，则 F, G 即为所求. □

由上述引理可见，任何一个满足条件 H_ω 的 Boole 代数都是不可数的.

下面的引理 1.9.8 和 1.9.9 都是为证明 Boole 代数间的同态扩张定理 1.9.10 服务的.

1.9.8 引理 设 $\boldsymbol{B}$ 是一个 Boole 代数，$n \in \mathbf{N}$. 又设对每个 $k \leqslant n, \gamma_k \in \omega, \{b_{ki} : i \leqslant \gamma_k\} \subset \boldsymbol{B}$. 记 $k_n = \Pi\{\gamma_{k+1} : k \leqslant n\}$，则

$$\bigwedge_{k \leqslant n} \bigvee_{i \leqslant \gamma_k} b_{ki} = \bigvee_{a \in k_n} \bigwedge_{k \leqslant n} b_{ka_k}, \tag{A}$$

$$\bigvee_{k \leqslant n} \bigwedge_{i \leqslant \gamma_k} b_{ki} = \bigwedge_{a \in k_n} \bigvee_{k \leqslant n} b_{ka_k}, \tag{B}$$

其中 a_k 表示 a 的第 k 个分量.

证明 我们对 n 进行归纳证明. $n = 1$ 时，$k_1 = \gamma_1 + 1 = \{0, 1, \cdots, \gamma\}$. 这时(A)式左边 $= \bigvee_{i \leqslant \gamma_1} b_{1i}$，右边 $= \bigvee_{a \in k_1} b_{1a_k} = \bigvee_{i \leqslant \gamma_1} b_{1i}$，二者是相等的. 现在假设(A)式对 n 成立.

对 $n + 1$，有

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{k \leqslant n+1} \bigvee_{i \leqslant \gamma_k} b_{ki} &= [\bigwedge_{k \leqslant n} \bigvee_{i \leqslant \gamma_k} b_{ki}] \wedge [\bigvee_{i \leqslant \gamma_{n+1}} b_{n+1i}] \\
&= [\bigvee_{a \in k_n} \bigwedge_{k \leqslant n} b_{ka_k}] \wedge [\bigvee_{i \leqslant \gamma_{n+1}} b_{n+1i}] \\
&= \bigvee_{i \leqslant \gamma_{n+1}} [\bigvee_{a \in k_n} (\bigwedge_{k \leqslant n} b_{ka_k} \wedge b_{n+1i})] \\
&= \bigvee_{a \in k_n \times (\gamma_{n+1}+1)} \bigwedge_{k \leqslant n+1} b_{ka_k} \\
&= \bigvee_{a \in k_{n+1}} \bigwedge_{k \leqslant n+1} b_{ka_k}.
\end{aligned}$$

所以(A)式对任何 n 成立.(B)式与(A)式是对偶的,所以也成立. □

1.9.9 引理 设$\boldsymbol{B}$是一个 Boole 代数,$C\subset \boldsymbol{B}$,$C\neq\varnothing$. 记《C》为由 C 生成的 Boole 子代数(即《C》为包含 C 的最小 Boole 子代数),则

(1) $《C》=\{\bigvee_{k\leq n}\bigwedge_{i\in\gamma_k}\varepsilon_{ki}c_{ki}: n\in\mathbf{N}, k\leq n, c_{ki}\in C, \varepsilon_{ki}\in\{-1,1\}\}$ (其中 $-c_{ki}$表示 c_{ki}的补元 c'_{ki}).

(2) 若$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{B}$的一个子代数,$b\in\boldsymbol{B}$,则

$$《\boldsymbol{A}\cup\{b\}》=\{(a_0\wedge b)\vee(a_1\wedge b'): a_0, a_1\in\boldsymbol{A}\}.$$

证明 (1) 记$\boldsymbol{A}$为(1)式中右边的集,显然有 $C\subset\boldsymbol{A}\subset《C》$. 故只需验证$\boldsymbol{A}$是 $\boldsymbol{B}$ 的一个子代数即可. 设 $a, b\in\boldsymbol{A}$, $a=\bigvee_{k\leq n_1}\bigwedge_{i\leq k_k}\varepsilon_{ki}c_{ki}$, $b=\bigvee_{k\leq n_2}\bigwedge_{i\leq\bar{\gamma}_k}\bar{\varepsilon}_{ki}\bar{c}_{ki}$. 记 $\gamma_{n_1+k}=\bar{\gamma}_k$, $\varepsilon_{n_1+ki}=\bar{\varepsilon}_{ki}$, $c_{n_1+ki}=\bar{c}_{ki}$, $n=n_1+n_2$. 然后将 b 改写成 $b=\bigvee_{k=n_1+1}^{n}\bigwedge_{i\leq\gamma_k}\varepsilon_{ki}c_{ki}$. 则

$$a\vee b=\bigvee_{k\leq n}\bigwedge_{i\leq\gamma_k}\varepsilon_{ki}c_{ki}\in\boldsymbol{A}.$$

又设 $k=\Pi_{k\leq n}(\gamma_k+1)$. 则由 1.9.8 得

$$\begin{aligned}a'&=\bigwedge_{k\leq n}\bigvee_{i\leq\gamma_k}(-\varepsilon_{ki}c_{ki})\\&=\bigvee_{a\in k}\bigwedge_{k\leq n}(-\varepsilon_{ki})c_{ki}\in\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{A}$是一个 Boole 子代数.

(2) 由(1)的构造,显然有右边⊂左边. 另一方面,容易验证右边的集关于取$\wedge$及取补元的运算是封闭的,从而构成一个 Boole 代数,又$\boldsymbol{A}\cup\{b\}\subset$右边,所以等式成立. □

1.9.10 引理 设$\boldsymbol{B}$是一个 Boole 代数,$C\subset\boldsymbol{B}$,使《C》$=\boldsymbol{B}$. 又设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 Boole 代数,f是 C 到$\boldsymbol{A}$的一个映射,若 f 满足下述条件:

$\forall n<\omega, c_k\in C, \varepsilon_k\in\{-1,1\}, k\leq n$,有

$$\bigwedge_{k\leq n}\varepsilon_k c_k=0\Longrightarrow\bigwedge_{k\leq n}\varepsilon_k f(c_k)=0,$$

则 f 可以唯一地扩张成$\boldsymbol{B}$到$\boldsymbol{A}$的一个同态映射φ.

证明 由引理 1.9.9,对每个 $a\in\boldsymbol{B}$,有 $a=\bigvee_{k\leq n}\bigwedge_{i\leq\gamma_i}\varepsilon_{ki}c_{ki}$的形式. 定义

$$\varphi(a)=\bigvee_{k\leq n}\bigwedge_{i\leq\gamma_k}\varepsilon_{ki}f(c_{ki}).$$

首先我们证明 $\varphi(a)$是不依赖于 a 的表示形式而唯一确定的. 假设$a = \bigvee_{k' \leq n'} \bigwedge_{i' \leq \gamma_{k'}} \varepsilon'_{k'i'} c'_{k'i'}$，则

$$0 = (\bigvee_{k \leq n} \bigwedge_{i \leq \gamma_k} \varepsilon_{ki} c_{ki}) - (\bigvee_{k' \leq n'} \bigwedge_{i' \leq \gamma_{k'}} \varepsilon'_{k'i'} c'_{k'i'})$$

$$= \bigvee_{k \leq n} \bigwedge_{i \leq \gamma_k} \varepsilon_{ki} c_{ki} - \bigwedge_{\alpha \in k} \bigvee_{k' \leq n'} \varepsilon'_{k'\alpha'_k} c'_{k'\alpha'_k}$$

$$= \bigvee_{\alpha \in k} \bigvee_{k \leq n} \bigwedge_{k' \leq n'} \bigwedge_{i' \leq \gamma_{k'}} (\varepsilon_{ki} c_{ki} - \varepsilon_{k'\alpha'_k} c'_{k'\alpha'_k}).$$

于是 $\bigwedge_{k' \leq n'} \bigwedge_{i' \leq \gamma_{k'}} (\varepsilon_{ki} c_{ki} - \varepsilon'_{k'\alpha'_k} c'_{k'\alpha'_k}) = 0.$

由假设条件有

$$\bigwedge_{k' \leq n'} \bigwedge_{i' \leq \gamma_{k'}} (\varepsilon_{ki} f(c_{ki}) - \varepsilon'_{k'\alpha'_k} f(c'_{k'\alpha'_k})) = 0.$$

这就证明了

$$\bigvee_{k \leq n} \bigwedge_{i \leq \gamma_k} \varepsilon_{ki} f(c_{ki}) \leq \bigvee_{k' \leq n'} \bigwedge_{i' \leq \gamma_{k'}} \varepsilon'_{k'i'} f(c'_{k'i'}).$$

对称地推证可得到反向不等式. 这就证明了 $\varphi(a)$是唯一确定的.

由引理 1.9.9 中(1)的论证及 φ 的定义容易验证$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$及 $\varphi(a') = \varphi(a)'$，所以 φ 是$\boldsymbol{B}$到$\boldsymbol{A}$的一个同态映射. φ 的唯一性是显然的. □

1.9.11 定理(CH) 若$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{E}$是两个势不超过 $c = 2^{\omega}$ 并且满足条件 H_{ω} 的 Boole 代数，则$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{E}$是同构的.

证明 由引理 1.9.7 后面的说明及 CH，可设$\boldsymbol{B} = \{b_{\alpha} : \alpha < \omega_1\}$，$\boldsymbol{E} = \{e_{\alpha} : \alpha < \omega_1\}$，$b_0 = 0$，$e_0 = 0$. 用归纳法，我们将对每个 $\alpha < \omega_1$，分别构造子代数$\boldsymbol{B}_{\alpha} \subset \boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{E}_{\alpha} \subset \boldsymbol{E}$，使它满足如下条件：

(1) $\beta < \alpha \Rightarrow \boldsymbol{B}_{\beta} \subset \boldsymbol{B}_{\alpha}$，$\boldsymbol{E}_{\beta} \subset \boldsymbol{E}_{\alpha}$.

(2) $b_{\alpha} \in \boldsymbol{B}_{\alpha}$，$e_{\alpha} \in \boldsymbol{E}_{\alpha}$.

(3) 存在$\boldsymbol{B}_{\alpha}$ 到$\boldsymbol{E}_{\alpha}$ 的一个同构映射σ_{α}，并且 $\beta < \alpha \Rightarrow \sigma_{\beta} \subset \sigma_{\alpha}$.

令 $\boldsymbol{B}_0 = \{0,1\}$，$\boldsymbol{E}_0 = \{0,1\}$，$\sigma = \{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle\}$.

假设对所有 $\beta < \alpha$，$\boldsymbol{B}_{\beta}$，$\boldsymbol{E}_{\beta}$，σ_{β} 均已作出. 记 $\boldsymbol{F} = \bigcup \{\boldsymbol{B}_{\beta} : \beta < \alpha\}$，$\boldsymbol{G} = \bigcup \{\boldsymbol{E}_{\beta} : \beta < \alpha\}$.

(1) 若 $b_{\alpha} \in \boldsymbol{F}$，同时 $e_{\alpha} \in \boldsymbol{G}$，则令$\boldsymbol{B}_{\alpha} = \boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{E}_{\alpha} = \boldsymbol{G}$，$\sigma_{\alpha} = \bigcup \{\sigma_{\beta} : \beta < \alpha\}$.

(2) 若 $b_{\alpha} \in F$. 记 $\sigma = \bigcup \{\sigma_{\beta} : \beta < \alpha\}$，$F_0 = \{f \in F : F < b_{\alpha}\}$，$f_1 = \{f \in F : f > b_{\alpha}\}$，$F_2 = F - (F_0 \cup F_1)$. 由于$\boldsymbol{E}$满足条件$R_{\omega}$，所以存在 $e \in$

$\boldsymbol{E}$,使$\sigma(F_0) < \{e\} < \sigma(F_1)$,并且对任何 $\bar{e} \in \sigma(F_2)$,有 $e \not\leq \bar{e}, \bar{e} \not\leq e$.现在令$\sigma(b_\alpha) = e, \sigma(b'_\alpha) = e'$,则由引理 1.9.10,$\sigma$ 可扩张成为《$F \cup \{b_\alpha\}$》到《$\sigma(F) \cup \{e\}$》上的同构.若 $e_\alpha \in$《$\sigma(F) \cup \{e\}$》,则令 $\boldsymbol{B}_\alpha =$《$F \cup \{b_\alpha\}$》,$\boldsymbol{E}_\alpha =$《$\sigma(F) \cup \{e\}$》,$\sigma_\alpha = \sigma$;若 $e_\alpha \in$《$\sigma(F) \cup \{e\}$》$= G$,则将 G 分成 $G_0 = \{g \in G : g < e_\alpha\}$,$G_1 = \{g \in G : g > e_\alpha\}$和 $G_2 = G - (G_0 \cap G_1)$.对$\boldsymbol{B}$用 R_ω,并且用 σ^{-1}代替前面论证中的 σ,就得出 σ^{-1}从《$G \cup \{e_\alpha\}$》到《$\sigma^{-1}(G) \cup \{b\}$》的同构扩张($b$ 是对$\boldsymbol{B}$应用 R_ω 时所得到的元素,相当于前面论证中的 e),这时令$\boldsymbol{B}_\alpha =$《$\sigma^{-1}(G) \cup \{b\}$》,$\boldsymbol{E}_\alpha =$《$G \cup \{e_\alpha\}$》.容易验证归纳条件仍然满足.最后令 $\sigma = \bigcup\{\sigma_\alpha : \alpha < \omega_1\}$,则 σ 是$\boldsymbol{B} = \bigcup\{\boldsymbol{B}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$到$\boldsymbol{E} = \bigcup\{\boldsymbol{E}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$上的一个同构映射. □

1.9.12 定义 设 X 是完全正则空间,如果 $C(X)$(X 上的实值连续函数环)的每个有限生成理想都是主理想,就称 X 是一个 F 空间. □

根据 Gillman 和 Jerison[1960]的 14.25,下列各命题是等价的.

1. X 是 F 空间.
2. βX 是 F 空间.
3. 对任意的 $p \in \beta X$,O^p 是素理想.
4. 每个余零集都是 C^* 嵌入的.
5. $C(X)$的每个理想都是凸理想.
6. 每一对不相交的余零集是函数分离的.

1.9.13 引理 若 X 是正规空间,则 X 是 F 空间的充要条件是 X 的任何一对不相交的开 F_σ 集有不相交的闭包.

证明 设 X 是正规 F 空间,U, V 是不相交的开 F_σ 集,这时 U, V 都是余零集,于是存在 $F \in C^*(X)$,使 $U \subset F^{-1}(0)$,$V \subset F^{-1}(1)$,$0 \leq F \leq 1$.注意 $\bar{U} \subset F^{-1}(0)$,$\bar{V} \subset F^{-1}(1)$,显然它们不相交.

反之,若 X 是满足引理所述条件的正规空间,U, V 是一对不相交的余零集,则它们都是开 F_σ 集,于是 $\bar{U}, \bar{V}$ 是不相交的闭集.由 X 的正规性,它们函数分离,因而 U, V 也是函数分离的.X 是 F 空间. □

1.9.14 引理 设 X 是一个没有孤立点的,紧的 0 维空间,则下述命题是等价的:

(1) 由 X 的全体开闭集构成的 Boole 代数$\boldsymbol{B}(X)$满足条件 H_ω.

(2) X 是 F 空间,并且每个不空的 G_δ 集有无限的内部.

证明 先证(1)⇒(2). X 是 0 维空间,故$\boldsymbol{B}(X)$是 X 的一个基. 由 X 的正规性,若 U, V 是不相交的开 F_σ 集,则 U, V 可以表示成 $U = \bigcup_n A_n$, $V = \bigcup_n C_n$,其中 $A_n, C_n \in \boldsymbol{B}(X)$,并且$\{A_n : n < \omega\}$和$\{C_n : n < \omega\}$是单调上升序列. 令 $B_n = X - C_n$,则$\{B_n : n < \omega\} \subset \boldsymbol{B}(X)$是单调下降的,并且有$\{A_n : n < \omega\} < \{B_n : n < \omega\}$. 由条件 H_ω,存在 $E \in \boldsymbol{B}(X)$,使$\{A_n : n < \omega\} < \{E\} < \{B_n : n < \omega\}$. 于是 $U \subset E$, $E \subset \bigcap_n B_n = X - V$, E 是开闭集,所以 U, V 是函数分离的. X 是 F 空间,又假设$\{G_n : n < \omega\}$是开集序列,$\bigcap_n G_n \neq \varnothing$. 取 $x \in \bigcap_n G_n$,对每个 n,取 $A_n \in \boldsymbol{B}(X)$,使 $x \in A_n \subset G_n$,则$\{0\} < \{A_n : n < \omega\}$. 由条件 H_ω,存在 $B \in \boldsymbol{B}(X)$,使$\{0\} < \{B\} < \{A_n : n < \omega\}$,于是 $B \subset \bigcap_n G_n$. 因为 X 没有孤立点,所以 B 是无限集.

再证(2)⇒(1). 设$\{A_n : n < \omega\} \subset \boldsymbol{B}(X)$和$\{B_n : n < \omega\} \subset \boldsymbol{B}(X)$满足$\{A_n : n < \omega\} < \{B_n : n < \omega\}$,则 $U = \bigcup_n A_n$, $V = X - \bigcap_n B_n$ 都是开的 F_σ 集,$U \cap V = \varnothing$. X 是正规 F 空间,这样 $H = \overline{U}$, $K = \overline{V}$ 是不相交的紧集,存在 $E \in \boldsymbol{B}(X)$,使 $H \subset E$, $E \cap K = \varnothing$. 于是$\{A_n : n < \omega\} < \{E\} < \{B_n : n < \omega\}$. 这表明$\boldsymbol{B}(X)$满足条件 H_ω. □

1.9.15 定义 满足下列条件的空间 X 称为 Parovičenko 空间:

(1) X 是 0 维紧 T_2 空间.

(2) X 是 F 空间,$w(X) = c$,并且 X 的每个不空 G_δ 集有无限的内部. □

1.9.16 定理(CH) 每个 Parovičenko 空间都与 ω^* 同胚.

证明 由于不空的 G_δ 集有无限的内部,X 不含孤立点. 引理 1.9.14表明$\boldsymbol{B}(X)$满足条件 H_ω. 由 $w(X) = c$,可取一个势为 c,并对有限并运算封闭的基 $\mathscr{B}$. 注意每个 $E \in \boldsymbol{B}(X)$是 X 中的紧 G_δ 集,所以 E 可以表示成 $\mathscr{B}$的可数个元之交,这表明$|\boldsymbol{B}(X)| = c$. 由定理 1.9.4 和定理 1.9.11, $\boldsymbol{B}(X)$与 $\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 是同构的. 于是 $S(\boldsymbol{B}(X))$与 $S(\mathscr{P}(\omega)/Fin)$,即与 ω^* 同胚(定理 1.9.2). 但 X 是 0 维紧空间,故 X

是强0维的. 于是 $S(B(X))$与 $\beta X = X$ 同胚. 这就证明了 X 与 ω^* 同胚.

□

定理 1.9.16 说明了在 CH 下, 定义 1.9.15 所述的拓扑性质是 ω^* 的一个本征刻画. 但是当 CH 不成立时, 定理 1.9.16 所述的命题也不再成立. 事实上可以进一步得出下列结论.

1.9.17 定理 下述命题是等价的:

(1) CH.

(2) 任意两个势 $\leqslant c$ 的满足条件 H_ω 的 Boole 代数是同构的.

(3) 所有的 Parovičenko 空间彼此同胚. □

其中(1)⇒(2)⇒(3)的证明已见于本节. 至于(3)⇒(1)的证明请参看 van Douwen 和 Jan van Mill 的文章[1978].

1.9.18 定义 设 X 是一个完全正则空间. 点 $x \in X$ 称为 P 点, 如果 x 的任意可数个邻域 $\{U_n : n < \omega\}$ 的交还是 x 的一个邻域, 即 $x \in \mathrm{Int}(\bigcap_n U_n)$. □

从定义可以看出, X 的每个孤立点都是 P 点. 如果 X 的每个点都是 P 点, 则 X 称为 P 空间. P 点和 P 空间的研究始于 20 世纪 50 年代关于 ω^* 的齐性问题和关于连续函数环的研究. W. Rudin[1956] 首先证明了在 CH 下 ω^* 中 P 点的存在性.

1.9.19 引理 ω^* 不能表示成 ω_1 个 nwd 集的并.

证明 假设 $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是一族 cnwd 集. 对每个 α, 由于 ω^* 是 F 空间, $\omega^* - \bigcup\{D_\xi : \xi < \alpha\}$ 有不空的内部. 于是我们可以归纳地选择紧开集族 $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, 使它满足以下条件:

$$\forall \alpha, C_\alpha \subset (\omega^* - \bigcup\{D_\xi : \xi < \alpha\}) \cap (\bigcap\{C_\xi : \xi < \alpha\}).$$

显然 $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 有 fip, 所以 $\bigcap\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\} \neq \varnothing$. 由此得出 $\bigcup\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\} \neq \omega^*$. □

1.9.20 定理(CH) ω^* 中存在 P 点.

证明 首先我们指出 ω^* 中全体开 F_σ 集的集有势 ω_1. 取 ω^* 的一个势为 $c = \omega_1$ 的, 由紧开集构成的基 $\mathscr{B}$. 设 $U = \bigcup_n F_n$ 是一个开 F_σ 集, 则每个 F_n 是紧的. 这样就可以找到可数个 $\mathscr{B}$ 中的元 $\{B_n : n < \omega\}$, 使 U

$=\bigcup\{B_n: n<\omega\}$. 由 $|[\mathscr{B}]^\omega|=\omega_1{}^\omega=2^\omega=\omega_1$ 就可得出所说的结论.

设 $\mathscr{A}=\{\overline{U}-U: U$ 为 ω^* 中的开 F_σ 集$\}$. 则 $|\mathscr{A}|=\omega_1$. $\mathscr{A}$ 的每个元都是 cnwd 集,由引理 1.9.19,得 $\omega^*-\bigcup\mathscr{A}\neq\varnothing$.

设 $p\in\omega^*-\bigcup\mathscr{A}$. 我们来证明 p 是一个 P 点. 假设 $\{U_n: n<\omega\}$ 是包含点 p 的开集序列. 对每个 n,取一个紧开集 $B_n\subset U_n, p\in B_n$. 这样 $p\in\bigcap_n B_n\subset\bigcap_n U_n$. 记 $V=\omega^*-\bigcap_n B_n=\bigcup\{\omega^*-B_n: n<\omega\}$. 则 V 是一个开 F_σ 集, $p\notin V$. 由 p 的定义可知 $p\notin\overline{V}$,于是存在 p 的邻域 $B\in\mathscr{B}$,使 $B\cap\overline{V}=\varnothing$,即 $B\subset\omega^*-\overline{V}\subset\omega^*-V=\bigcap_n B_n\subset\bigcap_n U_n$. 所以 p 是 P 点. □

1.9.21 定理 若 X 是一个 P 空间,则 X 的每个可数子集是闭离散集. 因此,每个可数紧的 P 空间只包含有限个点.

证明 设 $C=\{x_n: n<\omega\}$,则 C 是 F_σ 集. $X-C$ 是 G_δ 集. X 是 P 空间,所以 $X-C$ 是开集, C 是闭的. 由 C 的任意性可知, C 是闭离散集. □

1.9.22 定理(CH) ω^* 同时包含有 P 点和非 P 点,因而 ω^* 不是齐性的.

证明 由定理 1.9.21, ω^* 包含非 P 点. 设 p 是 P 点, q 是非 P 点,则不可能存在 ω^* 的自映射 φ,使 $\varphi(p)=q$. 所以 ω^* 不是齐性的. □

注: ω^* 的非齐性实际上可以在 ZFC 中证明出来(参看 van Mill [1984]的 3.4.1 和 3.4.2).

现在我们转到本节的最后部分,利用 ω^* 中的 P 点构造一个伪紧,可数 meso 紧(即每个可数开覆盖有紧有限的开加细),非可数仿紧的空间.

1.9.23 引理 设 U, V 是 ω^* 中的两个非紧的余零集,则存在双射 $\pi:\omega\to\omega$,使 $h=\beta\pi\upharpoonright\omega^*$ 满足 $h(U)=V$(此处 $\beta\pi$ 表示 π 在 $\beta\omega$ 上的扩张).

证明 设 $\{A_n: n<\omega\}$ 和 $\{B_n: n<\omega\}$ 是 ω 的两个由无限子集组成的划分,使

$$U=\bigcup_n A_n{}^*, V=\bigcup_n B_n{}^*.$$

设 π 是 ω 的一个置换,使得对所有 n, $\pi(A_n)=B_n$,则 $h=\beta\pi\upharpoonright\omega^*$ 即为

所求. □

注意 h 是 ω^* 上的一个自同胚,引理 1.9.23 说明, ω^* 中任何两个非紧的余零集彼此之间是同胚的.

设 $p\in\omega^*$,记 $Q(p)=\{q\in\omega^*$:存在双射 $\pi:\omega\to\omega$,使 $\beta\pi\restriction\omega^*=h$ 满足 $h(p)=q\}$.

1.9.24 定理 (1) $Q(p)$是 ω^* 中的稠密集.

(2) $\omega\cup Q(p)$作为 $\beta\omega$ 的子空间是伪紧的.

证明 (1) 设 G 是不空开集. 若 $p\in G$,取 $q\in G$,再取 p,q 的两个不相交的非紧余零集邻域U 和$V\subset G$,由引理 1.9.23,存在 $\pi:\omega\to\omega$,使 $h=\beta\pi\restriction\omega^*$ 满足 $h(U)=V$. 于是 $h(p)\in V\subset G$,即 $G\cap Q(p)\neq\varnothing$. 这就证明了 $Q(p)$是稠密的.

(2) 假如 $X=\omega\cup Q(p)$不是伪紧的,则存在 X 上一个无界实值连续函数 f. 令 $g=(f^2+1)^{-1}$,则 g 在 X 上连续,$0<g\leqslant 1$,并且 $\operatorname{Inf}\{g(x):x\in X\}=0$. 设 βg 是 g 在$\beta X=\beta\omega$ 上的扩张. 因为 ω 在 X 上稠密,对每个 $k\in\mathbf{N}$,存在 $n_k\in\omega$,使 $g(n_k)<\dfrac{1}{k}$. 令 $W=\{n_k:k\in\mathbf{N}\}$. 因为 g 不能在 W 上取到最小值,所以 W 是ω 的无限子集. 记 $W^*=\{x\in\beta\omega:W\in x\}$,这时 $W^*\cap\omega^*$ 是 ω^* 中的不空开集. 由 $Q(p)$在 ω^* 中的稠密性, $W^*\cap Q(p)\neq\varnothing$. 任取一点 $q\in W^*\cap Q(p)$,则存在 $m\in\mathbf{N}$,使 $g(q)>\dfrac{1}{m}$. 记 $V=\left\{x\in\beta\omega:\beta g(x)>\dfrac{1}{m}\right\}$,则 $V-W=V-\{n_k:k\leqslant m\}$ 是与 W 不相交的q 的邻域. 这与 $q\in W^*$是矛盾的,因为 W^* 在 $\beta\omega$ 中既是开集同时也是闭集. □

注:定理 1.9.24 中(2)的论证部分是参考了 Ginsburg 和 Saks[1975] 的定理 5.9 改写的.

1.9.25 定理(CH) 若 p 是ω^*的 P 点,则 $X=\omega\cup Q(p)$是可数亚紧的.(陈海燕,戴牧民[1995])

证明 注意 $|Q(p)|=|[\omega]^\omega|=2^\omega$. 在 CH 下,将 $Q(p)$排列成 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 设$\{U_n:n<\omega\}$是 X 的一个可数开覆盖,对每个 n,取 $\beta\omega$ 中一个开集 V_n,使 $U_n=V_n\cap X$. 归纳地选取$\{B_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset[\omega]^\omega$,使它

满足如下条件：

(1) 对任何 α，有 $x_\alpha \in B_\alpha^*$，同时存在 n 使 $B_\alpha^* \subset V_n$.

(2) 若 $\beta < \alpha$，则 $B_\alpha^* = B_\beta^*$ 或 $B_\alpha^* \cap B_\beta^* = \varnothing$.

假设 $\{B_\beta : \beta < \alpha\}$ 已经选好. 若存在某个 $\beta < \alpha$，使 $x_\alpha \in B_\beta^*$，则选 $B_\alpha = B_\beta$，否则的话，$x_\alpha \notin \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta^*$，这时取 $B_\alpha \in [\omega]^\omega$，使 $x_\alpha \in B_\alpha^* \subset \omega^* - \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta^*$.

现在令

$$n(\alpha) = \min\{n : B_\alpha^* \subset V_n\},$$
$$W_n = \bigcup\{\omega \cup B_\alpha^* : n(\alpha) = n\},$$
$$G_n = (W_n \cap V_n) - \{0, 1, \cdots, n-1\},$$
$$\mathscr{G} = \{G_n \cap X : n < \omega\}.$$

这时对任何 n，$G_n \cap X$ 是 X 中的开集，$G_n \subset V_n$，$Q(p) \subset \bigcup G_n$，并且对任何 $\alpha < \omega$，有 $\mathrm{ord}(x_\alpha, \mathscr{G}) = 1$. 这样，$\mathscr{G} \cup \{\{n\} : n \notin \bigcup\{G_n : n < \omega\}\}$ 就是 $\{U_n : n < \omega\}$ 的点有限开加细. 因此 X 是可数亚紧的. □

1.9.26 定理(CH) 存在伪紧的可数 meso 紧空间，它不是可数仿紧的.(陈海燕，戴牧民[1995])

证明 取 $X = \omega \cup Q(p)$，其中 p 是 ω^* 中的 P 点. 由定理 1.9.25，X 是可数亚紧的. 由紧子集的绝对闭性质及 X 的势 $= c < 2^c$，可知 X 中的紧子集只可能是有限集，所以点有限与紧有限是同义的. 于是 X 是可数 meso 紧空间. 因为 $Q(p)$ 中的任何可数集都是离散的，所以 $X = \omega \cup Q(p)$ 不是可数紧空间. 而伪紧的可数仿紧空间必定是可数紧的，这就说明了 X 不是可数仿紧空间. □

伪紧性和可数紧性之间的关系是一个受到众多学者关注的问题. 早期的结果有：正规伪紧空间是可数紧的，紧性等价于伪紧性加实紧性(参看 Gillman, Jerson[1960], $3D2$ 和 $5H2$). Mrowka 的空间 $\psi(\omega)$ 是伪紧 Moore 空间而非可数紧的著名例子. Moore 空间是次仿紧的，这说明了伪紧性加次仿紧性不能推出可数紧性. 另一方面，Scott[1979] 和 Watson[1981] 各自独立地证明了伪紧的亚紧空间是紧的. Uspenski[1984] 证明了伪紧的，有 σ-点有限基的空间是可度量的. 王燕敏[1988]进一步证明

了伪紧的，σ-亚紧空间是紧的. Burke 和 Davis[1982]证明了伪紧的仿 Lindelöf 空间或 σ-仿 Lindelöf 空间是紧的. 对于亚 Lindelöf 空间，1979 年 Scott 在 CH 下给出了伪紧、非紧的亚 Lindelöf 空间的例子. Watson[1985]进一步给出了这种空间的绝对例子. 至于沿正规性条件弱化的方面开展的研究，1978 年 Vaughan 提出了 wD(弱 D)性质的概念，指出了可数紧性等价于 feebly 紧性加 wD 性质(对于完全正则空间，feebly 紧性与伪紧性一致). 定理 1.9.26 是有关这些研究结果的一个补充.

§10　HFD 与 HFC

HFD 与 HFC 是空间 2^{ω_1}(此处 2^{ω_1}是指 ω_1 个离散空间$\{0,1\}$的积空间)中两种特殊的子集，它们的定义是由匈牙利学者 Hajnal 和 Juhasz 提出的，并且被分别用来构造 S 空间和 L 空间([1972],[1974]).

为了方便起见，我们将 2^{ω_1}中的点看成是定义域为 ω_1 而值域为$\{0,1\}$的函数. 对于 $\omega_1\times 2$ 的有限函数 σ(即 $\sigma\subset\omega_1\times 2$ 是函数，$|\sigma|<\omega$)，记$[\sigma]=\{f\in 2^{\omega_1}:\sigma\subset f\}$. 容易看出$\{[\sigma]:\sigma\in[\omega_1\times 2]^{<\omega}$是函数$\}$构成了 2^{ω_1}的一个基.

1.10.1　定义　(1) $X\subset 2^{\omega_1}$称为尾性稠密的(finally dense)，如果存在 $\alpha<\omega_1$，使得对每个函数 $\sigma\in[(\omega_1-\alpha)\times 2]^{<\omega}$，$[\sigma]\cap X$ 都是无限集.

(2) X 称为一个 HFD(hereditarily finally dense)，如果 X 的每个无限子集都是尾性稠密的.

(3) 2^{ω_1}中的开集 G 称为不可数集 X 的一个尾性覆盖(final covering)，如果$|X-G|\leqslant\omega$. G 称为良性劈分的(nicely split)，如果 $G=\bigcup\{[\sigma_i]:i<\omega\}$，而$\{\mathrm{dom}\,\sigma_i:i<\omega\}$是$[\omega_1]^{<\omega}$中的互斥族.

(4) 不可数集 $X\subset 2^{\omega_1}$称为一个 HFC(hereditarily final covered)，如果任何一个良性劈分的开集 G 都是 X 的一个尾性覆盖. □

由上述定义可看出，HFD 的无限子集还是 HFD. HFC 的不可数子集还是 HFC.

1.10.2　定理　∃HFD⇒∃S 空间.

证明 首先证明,若 X 是一个 HFD,则 X 是遗传可分的. 如若不然,则 X 包含一个左分离序列 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 和存在 $\{[\sigma_\alpha]:\alpha<\omega_1\}$,使得对每个 α, $x_\alpha\in[\sigma_\alpha]$,而当 $\beta<\alpha$ 时, $x_\beta\notin[\sigma_\alpha]$. $\{\sigma_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是一个势为 ω_1 的有限集族. 根据 Δ 系统引理(见后面的定理 1.10.6),存在不可数子族,使它们有一个根. 注意左分离序列的任何不可数子序列仍是左分离的. 不失普遍性,可直接假设 $\{\sigma_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 有根 σ,并且 $\sigma_\alpha=\sigma\cup\mu_\alpha$,其中 σ 是一固定的有限函数,而且 μ_α 互不相交. 于是对每个 α,有 $x_\alpha\in[\sigma_\alpha]=[\sigma]\cap[\mu_\alpha]\subset[\sigma]$. 记 $X_0=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$,它是 X 的无限集. 因为 $\{\mu_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是互斥的非空集族,所以对每个 σ,存在 $\beta>\alpha$,使 $\mu_\beta\subset[(\omega_1-\alpha)\times 2]^{<\omega}$. 这时 $[\mu_\beta]\cap X_0=[\mu_\beta]\cap[\sigma]\cap X_0=[\sigma_\beta]\cap X_0=\varnothing$. 这就与 X 是 HFD 的假设矛盾. 于是证明了 X 是遗传可分的.

现在设 $X=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是一个 HFD. 对每个 $\alpha<\omega_1$,定义 $y_\alpha\in 2^{\omega_1}$ 如下:

$$y_\alpha(\xi)=\begin{cases}0, & 若\ \xi\leqslant\alpha,\\ x_\alpha(\xi), & 若\ \xi>\alpha.\end{cases}$$

令 $Y=\{y_\alpha:\alpha<\omega_1\}$,则 $\varphi:x_\alpha\to y_\alpha$ 是 X 到 Y 上的一一对应.

论断 1 Y 是 HFD,从而是遗传可分的.

设 Y_0 是 Y 的可数无限子集, $X_0=\varphi^{-1}(Y_0)$. 设 α_0 满足条件: $\forall\sigma$,当 $\mathrm{dom}\,\sigma>\alpha_0$ 时, $X_0\cap[\sigma]$ 是无限的. 又设 $\alpha>\alpha_0$,使得 $Y_0\subset\{y_\xi:\xi<\alpha\}$. 这时若有 $\mathrm{dom}\,\sigma>\alpha$,则对每个 $y_\xi\in Y_0$,有 $y_\xi\upharpoonright_{\mathrm{dom}\,\sigma}=x_\xi\upharpoonright_{\mathrm{dom}\,\sigma}$,从而有 $x_\xi\in X_0\cap[\sigma]\Leftrightarrow y_\xi\in Y_0\cap[\sigma]$. 所以 $Y_0\cap[\sigma]$ 是无限的.

论断 2 Y 不是 Lindelöf 空间.

首先证明,若 X 是 HFD,则 $\{x\in X:|x^{-1}(0)|\leqslant\omega\}\cup\{x\in X:|x^{-1}(1)|\leqslant\omega\}$ 是有限集. 如若不然,设有无限个 x 使 $|x^{-1}(0)|\leqslant\omega$. 记 $X_0=\{x\in X:|x^{-1}(0)|\leqslant\omega\}=\{x\in X:\exists\,\alpha<\omega_1,\forall\,\xi>\alpha,x(\xi)=1\}$. 这时,对每个 α,记 $\sigma_\alpha=\{\langle\alpha+1,0\rangle,\langle\alpha+2,1\rangle\}$,则 $X_0\cap[\sigma_\alpha]=\varnothing$,与 X 是 HFD 矛盾. 不失普遍性,可假定对所有 $x\in X$, $|x^{-1}(0)|=|x^{-1}(1)|=\omega_1$. 于是对所有 $y\in Y$,也有 $|y^{-1}(0)|=|y^{-1}(1)|=\omega_1$. 若记 $G_\alpha=\{f\in 2^{\omega_1}:f(\alpha)=1\}$,则 $\{G_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 Y 的开覆盖. 但是对每个 α,当 β

$>\alpha$ 时，$y_\beta\upharpoonright_\alpha=0$，所以 $y_\beta\in\bigcup\{G_\xi:\xi<\alpha\}$．这说明 $\{G_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 没有可数子覆盖．

因此证明了 Y 是一个 S 空间． □

1.10.3 定理 $\exists$ HFC$\Rightarrow\exists\, L$ 空间．

证明 首先证明，若 X 是一个 HFC，则 X 是遗传 Lindelöf 空间．如若不然，设 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset X$ 是一个右分离序列，并且 $\{[\sigma_\alpha]:\alpha<\omega_1\}$ 满足条件：$\forall\alpha,[\sigma_\alpha]\cap\{x_\xi:\xi>\alpha\}=\varnothing$ 和 $x_\alpha\in[\sigma_\alpha]$．利用 Δ 系统引理，存在互斥的 $\{\mu_{\alpha(\xi)}:\xi<\omega_1\}$ 和 σ，使 $\sigma_{\alpha(\xi)}=\sigma\cup\mu_{\alpha(\xi)}$．不失普遍性，设 $X=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 和 $\{[\sigma_\alpha]:\alpha<\omega_1\}$ 本身就具有上述性质，现在令 $G=\bigcup\{[\mu_\alpha]:\alpha<\omega_1\}$，则 G 是一个良性劈分的开集．X 是 HFC，于是 $|X-G|\leqslant\omega$．对所有 α，有 $x_\alpha\in[\sigma_\alpha]=[\sigma]\supset[\mu_\alpha]$，所以 $X\subset[\sigma]$，并且

$$
\begin{aligned}
X-\bigcup\{[\sigma_\alpha]:\alpha<\omega_1\}&=X-G\cap[\sigma]=(X-G)\cap[\sigma]\\
&=(X-G)\cup(X-[\sigma])=X-G
\end{aligned}
$$

是可数集．于是存在 $\lambda<\omega_1$，使 $X\subset\bigcup\{[\sigma_\alpha]:\alpha<\lambda\}$．但由前面的假设，当 $\beta>\lambda$ 时，$x_\beta\notin\bigcup\{[\sigma_\alpha]:\alpha>\lambda\}$．这个矛盾就说明了 X 是遗传 Lindelöf 空间．

现在设 $X=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是一个 HFC．对每个 $\alpha<\omega_1$，定义 y_α 如下：

$$
y_\alpha(\xi)=\begin{cases}x_\alpha(\xi), & 若\ \xi\leqslant\alpha,\\ 0, & 若\ \xi>\alpha.\end{cases}
$$

记 $Y=\{y_\alpha:\alpha<\omega_1\}$．

论断 1 Y 是 HFC．

设 $G=\bigcup\{[\sigma_i]:i<\omega\}$ 是一个良性劈分的开集，记 $\alpha=\operatorname{Sup}\{\bigcup_{i<\omega}\operatorname{dom}\sigma_i\}$，则当 $\xi>\alpha$ 时，$y_\xi\upharpoonright_\alpha=x_\xi\upharpoonright_\alpha$．于是对所有 $\xi>\alpha$，有 $x_\xi\in G\Leftrightarrow y_\xi\in G$．因为 $\{y_\xi:\xi\leqslant\alpha\}$ 是可数的，$X-G$ 也是可数的，所以 $Y-G\subset\{y_\xi:\xi\leqslant\alpha\}\cup\{y_\xi:\xi>\alpha,x_\xi\in X-G\}$ 也是可数的．

论断 2 Y 是不可分的．

由 Y 是 HFC，可断定对任意的 α，存在 $y\in Y$ 和 $\xi>\alpha$，使 $y(\xi)=1$．否则存在 α，对所有 $y\in Y$ 和 $\xi\geqslant\alpha$，有 $y(\xi)=0$．令 $\sigma_i=\{\langle\alpha+i,1\rangle\}$，$G=\bigcup\{[\sigma_i]:i<\omega\}$，则 G 是一个良性劈分的开集，于是 $Y-G=Y$ 是不

可数的，与 Y 是 HFC 的假设矛盾.

现在取 $\sigma = \{\langle \xi, 1\rangle\}$，则$[\sigma]$是 y 的一个邻域，对任何 $\beta < \xi$，由 $y_\beta(\xi) = 0$ 可知 $y_\beta \notin [\sigma]$，即 $y \notin \mathrm{Cl}\{y_\beta : \beta < \alpha\}$. 所以 Y 没有可数稠密集.

因此证明了 Y 是一个 L 空间. □

下面我们来证明在 CH 下 HFC 与 HFD 这两类集的存在性.

1.10.4 定理(CH) $\exists$HFC 和 HFD.

证明 (1) HFC 的存在性.

由 CH，$[\omega_1]^{<\omega}$有势 ω_1，于是$[[\omega_1]^{<\omega}]^\omega$ 有势 $\omega_1{}^\omega = 2^\omega = \omega_1$. 这样全体良性劈分的开集也有势 ω_1. 将它们排成$\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. 对于 α，设 $U_\alpha = \bigcup\{[\sigma_{\alpha(i)}] : i < \omega\}$，其中$\{\mathrm{dom}\,\sigma_{\alpha(i)} : i < \omega\}$是互斥的. 令 $\mathscr{U}_\alpha = \{U_\beta : \beta < \alpha$，同时$\bigcup_i \mathrm{dom}\sigma_{\alpha(i)} \subset \alpha\}$，易见它顶多是个可数族. 现在将 $\mathscr{U}_\alpha$ 重新排列成$\{V_{\alpha(i)} : i < \omega\}$的形式，使得每个 $U \in \mathscr{U}_\alpha$，$\{i : V_{\alpha(i)} = U\}$是无限的.

归纳地构造$\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$如下：对每个 α，当 $\mathscr{U}_\alpha \neq \varnothing$时，选取相应的一族$\{\sigma_i : i < \omega\}$，使之满足条件：(a) 若 $V_{\alpha(i)} = U_\beta$，则 $\sigma_i \in \{\sigma_{\beta(j)} : j < \omega\}$. (b) $\{\mathrm{dom}\,\sigma_i : i < \omega\}$互不相交. 这是可以做到的，因为在作第 i 步时，$\{\mathrm{dom}\,\sigma_{\beta(j)} : j < \omega\}$是无限的互斥族，而$\bigcup\{\mathrm{dom}\,\sigma_k : k < i\}$只是有限并，所以存在 j 使 $\mathrm{dom}\,\sigma_{\beta(j)} \cap [\bigcup\{\mathrm{dom}\,\sigma_k : k < i\}] = \varnothing$. 这时选取 $\sigma_i = \sigma_{\beta(j)}$即可.

对 α 选定了$\{\sigma_i : i < \omega\}$之后，注意每个 $\mathrm{dom}\,\sigma_{\beta(j)} \subset \alpha$，所以 $\bigcup\{\mathrm{dom}\,\sigma_i : i < \omega\} \subset \alpha$. 现在定义 x_α，使得对所有 $\xi \geqslant \alpha$，有 $x_\alpha(\xi) = 0$，同时 $x_\alpha \upharpoonright_\alpha \supset \bigcup\{\sigma_i : i < \omega\}$，即 x_α 是函数$\bigcup\{\sigma_i : i < \omega\}$的一个扩张.

今证明 $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$是一个 HFC. 设 U 是一个良性劈分的开集，δ 是使 $U \in \mathscr{U}_\delta$ 的最小序数. 这时对任意 $\alpha \geqslant \delta$，有 $U \in \mathscr{U}_\alpha$. 设 $U = V_{\alpha(i)}$，则由条件(a)，$[\sigma_i] \subset U$. 但 $x_\alpha \upharpoonright_{\mathrm{dom}\sigma_i} = \sigma_i$，所以 $x_\alpha \in [\sigma_i] \subset U$，于是 $X - U \subset \{x_\xi : \xi < \delta\}$是可数的. 这就证明了 X 是 HFC.

(2) HFD 的存在性.

找出 HFD 的方法仍然是用归纳方法作出 $X = \{x_\xi : \xi < \omega_1\}$，但采取

的方式与(1)不同.在(1)中,每一步是作出一个完整的点 x_α,然而现在则是在每一步确定出所有各个点的第 α 个坐标,亦即确定出每个 x_ξ 在 α 处的函数值.记

$$[\omega_1]^\omega=\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\},B_\alpha=\{\beta<\alpha:A_\beta\subset\alpha\},S_\alpha=\mathrm{Fn}(\alpha,2,\omega),$$

其中 $\mathrm{Fn}(\alpha,2,\omega)$ 表示 $\alpha\times 2$,即 $\alpha\times\{0,1\}$ 中所有有限函数的集.易见 $|S_\alpha|\leqslant\omega$.

对每个 $\beta\in B_\alpha$ 和 $\sigma\in S_\alpha$,记

$$X_\beta=\{x_\gamma:\gamma\in A_\beta\},$$
$$X_{\beta,\sigma}=\{x_\gamma:\gamma\in A_\beta,x_\gamma\in[\sigma]\},$$
$$C_\alpha=\{X_{\beta,\sigma}:\beta\in B_\alpha,\sigma\in S_\alpha\}\cup\{x_\beta:\beta\in B_\alpha\}.$$

(注意:由于 x_γ 在完成整个归纳之前都还没有成为实在的东西,所以在归纳过程中,它们暂时还仅仅是一些符号.不过在第 α 步归纳时我们提出的归纳条件仅仅涉及有关符号在 α 以前的那些片段,而这些片段在第 α 步归纳时都已经在以前各步骤时确定好了,所以使用这些符号就不会发生逻辑上的毛病.)

假设对所有 $\beta<\alpha$,我们都已经定义好了 $\{x_\xi(\beta):\xi<\omega_1\}$,并假设它们满足下面的归纳条件

$$\forall Z\in C_\beta,|\{x\in Z:x(\beta)=0\}|=|x\in Z:x(\beta)=1\}|=\omega.\qquad(*)$$

记 $C_\alpha=\{Z_i:i<\omega\}$,使得对所有 $Z\in C_\alpha$,有 $|\{i:Z_i=Z\}|=\omega$.选出一个序列 $\{z_i:i<\omega\}$,使之满足如下条件:

① $\forall i,z_i\in\{x_\beta:\beta<\alpha\}$.

② $z_i=z_j\Rightarrow i=j$(即 z_i 互不相同).

③ $\forall i,z_i\in Z_i$.

由于每个 Z_i 是无限集,这样的序列是可以选出来的.对任意 $Z\in C_\alpha$,设

$$Z=Z_{n1}=Z_{n2}=\cdots=Z_{nj}=\cdots.$$

定义 $\{x_\xi(\alpha):\xi<\omega_1\}$ 如下:

若 $x_\xi\in\{z_{nj}:j<\omega\}$,则定义

$$x_\xi(\alpha)=\begin{cases}0,\text{若 } x_\xi=z_{nj},j\text{ 是奇数},\\1,\text{若 } x_\xi=z_{nj},j\text{ 是偶数}.\end{cases}$$

若 $x_\xi \in \{z_{nj}: j < \omega\}$，则 $x_\xi(\alpha) = 0$.

不难验证，$\{x_\xi(\alpha): \alpha < \omega_1\}$仍满足归纳条件(*).

于是我们完成了归纳过程，得到 2^{ω_1}中一个序列 $X = \{x_\xi: \xi < \omega_1\}$. 下面我们证明 X 是一个 HFD.

设 $A \subset X$ 是一个可数无限子集. 这时存在 $\beta < \omega_1$，使 $A_\beta = \{\gamma: x_\gamma \in A\}$. 设 δ 是使 $\beta \in B_\delta$ 的最小序数，于是 $A_\beta \subset \delta$. 对任何 $\sigma \in \mathrm{Fn}(\omega_1 - \sigma, z, \omega)$，取 $\alpha < \omega_1$，使 $\mathrm{dom}\,\sigma \subset \alpha$. 于是 $\sigma \in S_\alpha$，$A_\beta \subset \delta \subset \alpha$，从而

$$X_{\beta,\alpha} = \{x_\gamma: \gamma \in A_\beta, x_\gamma \in [\sigma]\} = [\sigma] \cap A \in C_\alpha.$$

因为 $X_{\beta,\alpha}$是无限集，所以 A 是尾性稠密的. □

在第二章§11 中，我们将证明，若承认 MA + ¬ CH，则不存在 HFC 和 HFD(2.11.3，2.11.4). 这就是说，HFC 和 HFD 的存在性是独立于 ZFC 的.

最后，我们来给出 Δ 系统的定义和 Δ 系统引理的证明.

1.10.5 定义 集族 A 称为 Δ 系统，如果存在集 r，对 A 中任意两个不同的集 x 和 y，都有 $x \cap y = r$. 集 r 称为 A 的根. □

1.10.6 定理(Δ 系统引理) 设 κ 是正则基数，$\kappa > \omega$；X 是任意一个集，$\mathscr{A} \subset [X]^{<\omega}$，$|\mathscr{A}| = \kappa$，则 $\mathscr{A}$ 包含一个势为 κ 的 Δ 系统.

证明 $\forall n < \omega$，记 $\mathscr{A}_n = \{A \in \mathscr{A}: |A| = n\}$. 则 $\mathscr{A} = \bigcup\{\mathscr{A}_n: n < \omega\}$. 因为 $\kappa > \omega$ 是正则基数，所以存在 n，使$|\mathscr{A}_n| = \kappa$. 不失普遍性，可设 $\mathscr{A}$ 本身就由 A 中势为 $n(n \geqslant 1)$的子集构成. 下面我们对 n 进行归纳论证.

$n = 1$ 时，$\mathscr{A}$ 的每个元都是单点集，所以 $\mathscr{A}$ 本身就是一个以$\varnothing$为根的 Δ 系统.

假设命题对 $1, 2, \cdots, n-1$ 都成立，又设 $\forall A \in \mathscr{A}$，$|A| = n$，取 $\mathscr{A}$ 的一个极大互斥族(根据 Zorn 引理，它是存在的)，记为 $\mathscr{A}'$. 若$|\mathscr{A}'| = \kappa$，则 $\mathscr{A}'$ 就是一个以 $\varnothing$ 为根的 Δ 系统. 若 $|\mathscr{A}'| < \kappa$，则有 $|\bigcup\mathscr{A}'| \leqslant \omega \cdot |\mathscr{A}'| = |\mathscr{A}'| < \kappa$. 因为 $\mathscr{A}'$是极大互斥族，所以 $\forall A \in \mathscr{A}$，$A \cap (\bigcup\mathscr{A}') \neq \varnothing$. $\forall p \in \bigcup\mathscr{A}'$，记 $\mathscr{A}_p = \{A \in \mathscr{A}: p \in A\}$，则有 $\mathscr{A} = \bigcup\{\mathscr{A}_p: p \in \bigcup\mathscr{A}'\}$. 由 $|\bigcup\mathscr{A}'\} < \kappa$ 及 κ 的正则性可知，存在 $p \in \bigcup\mathscr{A}'$，使$|\mathscr{A}_p| = \kappa$. 记 $\mathscr{B} = \{A - \{p\}: A \in \mathscr{A}_p\}$，则$|\mathscr{B}| = \kappa$，当 $B \in \mathscr{B}$

时有 $|B|=n-1$. 由归纳假设,存在 $\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$,使得 $|\mathscr{B}'|=\kappa$,$\mathscr{B}'$ 是一个 Δ 系统. 最后令

$$\mathscr{E}=\{B\cup\{p\}:B\in\mathscr{B}'\}.$$

则 $\mathscr{E}\subset\mathscr{A}$, $|\mathscr{E}|=\kappa$,并且 $\mathscr{E}$ 是一个 Δ 系统. □

§ 11　CCC 空间的乘积问题

一种拓扑性质对于乘积运算是否能够保持,历来是拓扑学研究的重要内容. 例如,我们已知,任意不超过 c 个可分空间的乘积空间是可分的,任意多个有 Calibre ω_1 的空间的乘积仍有 Calibre ω_1. 然而两个 Lindelöf 空间或两个可数紧空间的乘积都可以不是 Lindelöf 或可数紧的(参看 Engelking[1977]的 2.3.16, 2.7.11(b), 3.8.15, 3.10.19). 那么,对于 CCC 空间情况又如何呢?

首先我们给出下面一个定理.

1.11.1　定理　设 $\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ 是任意一族 CCC 空间,则 $X=\prod\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ 是 CCC 空间的充要条件是,对任意 $J\in[A]^{<\omega}$, $X_J=\prod\{X_\alpha:\alpha\in J\}$ 是 CCC 空间.

证明　对每个 $x\in X$,令 $\pi_J(x)=x\upharpoonright_J$,则 π_J 是 X 到 X_J 上的投影映射. 这是一个连续开映射. 若 X 是 CCC 空间,则 X_J 显然也是 CCC 空间.

反之,若 X 不是 CCC 空间,这时 X 必存在一个势为不可数的,由基本开集组成的互斥族 $\{U_\xi:\xi\in I\}$,每个 U_ξ 可以表示为

$$U_\xi=V_{A_\xi}\times\prod\{X_\alpha:\alpha\in A-A_\xi\}$$

的形式,其中 $A_\xi\in[A]^{<\omega}$, V_{A_ξ} 是 X_{A_ξ} 中的开集. 对 $\{A_\xi:\xi\in I\}$ 应用 Δ 系统引理,存在一个势为 ω_1 的拟互斥族 $\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 和一个根 J,记 $J_\alpha=A_\alpha-J$. 注意对不同的 α,β,有 $A_\alpha\cap A_\beta=J$. 假若 $J=\varnothing$,则 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$,与 $\{U_\xi:\xi\in I\}$ 是互斥族矛盾,于是 $J\neq\varnothing$. $\{\pi_J(U_\alpha):\alpha<\omega_1\}$ 是 X_J 中的开集族. 今证明它们是互斥的. 假若存在不同的 α,β 和 x_J,使 $x_J\in\pi_J(U_\alpha)\cap\pi_J(U_\beta)$,这时对任意选取的 $x_{J_\alpha}\in\pi_{J_\alpha}(U_\alpha)$, $x_{J_\beta}\pi_{J_\beta}(U_\beta)$, $x_J\cup$

$x_{I_\alpha} \cup x_{I_\beta}$都是定义在 $A_\alpha \cup A_\beta$ 上的一个函数. 它的任何一个扩张 $x \in X$ 都有 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, 与原设 $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 互斥矛盾. 这就证明了 X_J 也不是 CCC 空间. □

这样, CCC 的可乘性问题就转化为是否任意两个 CCC 空间的乘积还是 CCC 空间的问题. 1950 年, 南斯拉夫的 Kurepa 利用 Suslin 线作出了一个 CCC 空间的平方不是 CCC 空间的例子. 后来, 美国的 Kunen 证明了 $\mathrm{MA}\omega_1$ 蕴涵任意两个 CCC 空间的乘积还是 CCC 空间(见 2.1.13, 此结论最先由 Juhasz 于 1975 年在他的专著《Cardinal functions in Topology》中宣布). 这一节我们将介绍 1980 年由 Galvin 发表的运用 CH 作出的反例(更早一些时间, Laver 给出了类似的例子, 但没有正式发表), 其叙述主要参考了 Comfort 和 Negrepontis 合著的专著[1982].

1.11.2 引理 设 κ 是任意一个无限基数, A 是一个集. 又设对每个 $\xi < \kappa$, $\{F_\xi^i : i < \kappa\}$ 是 $[A]^{<\omega}$ 中的一个互斥族, 则 A 可以划分成两个集 A_0 和 A_1, 使得

$$\forall \xi < \kappa, \left| \{i : F_\xi^i \subset A_0\} \right| = \left| \{i : F_\xi^i \subset A_1\} \right| = \kappa.$$

证明 首先注意, 若 B 是一个无限集, $|B| < \kappa$, φ、ψ 是 B 到 κ 的两个函数, 则 $\left| \bigcup \{F_{\varphi(\xi)}^{\psi(\xi)} : \xi \in B\} \right| = |B| < \kappa$. 对任何 ξ, 由 $\{F_\xi^i : i < \kappa\}$ 的互斥性, 必定有一个 $i < \kappa$, 使

$$F_\xi^i \cap \left[\bigcup \{F_{\varphi(\xi)}^{\psi(\xi)} : \xi \in B\} \right] = \varnothing. \tag{1}$$

现在按归纳方式定义函数 τ, 使 $\mathrm{dom}\,\tau = \{\langle \xi, \eta \rangle : \xi \leqslant \eta < \kappa\}$, $\mathrm{ran}\,\tau \subset \kappa$, 并满足如下条件:

$$\forall \langle \xi, \eta \rangle \neq \langle \xi', \eta' \rangle, \text{有 } F_\xi^{\tau(\xi,\eta)} \cap F_{\xi'}^{\tau(\xi',\eta')} = \varnothing.$$

首先令 $\tau(0,0) = 0$. 假设对 $\eta < \kappa$ 已经在 $B_\eta = \{\langle \xi', \eta' \rangle : \xi' \leqslant \eta' < \eta\}$ 上都给出了 τ 的定义. 利用式(1), 令 $\xi = 0$, 可以定义 $\tau(0, \eta)$ 为使 $F_0^i \cap [\bigcup \{F_{\xi'}^{\tau(\xi',\eta')} : \langle \xi', \eta' \rangle \in B_\eta\}] = \varnothing$ 成立的最小序数 i. 现在进一步假设在 $B_\eta \cup \{\langle \xi', \eta' \rangle : \xi' < \xi\}$ 上已经给出 τ 的定义. 这时, 定义 $\tau(\xi, \eta)$ 为使 $F_\xi^i \cap [(\bigcup \{F_{\xi'}^{\tau(\xi',\eta')} : \langle \xi', \eta' \rangle \in B_\eta\}) \cup (\bigcup \{F_{\xi'}^{\tau(\xi',\eta)} : \xi' < \eta\})] = \varnothing$ 成立的最小序数 i. 于是我们完成了 τ 在 $B_{\eta+1}$ 上的定义, 也就完成了 τ 的定义.

对每个 $\xi<\kappa$，令 $J_\xi=\{\tau(\xi,\eta):\xi\leqslant\eta<\kappa\}$，并将 J_ξ 划分成 J_{ξ_0} 和 J_{ξ_1}，使 $|J_{\xi_0}|=|J_{\xi_1}|=\kappa$. 然后令

$$A_0=\bigcup\{F_\xi^\zeta:\xi<\kappa,\zeta\in J_{\xi_0}\},A_1=A-A_0,$$

则对任意 ξ，有

$\{\zeta:F_\xi^\zeta\subset A_0\}=J_{\xi_0}$,

$\{\zeta:F_\xi^\zeta\subset A_1\}\supset J_\xi-J_{\xi_0}=J_{\xi_1}$.

所以 A_0,A_1 即为所求. □

注：引理 1.11.2 中，A 可以是任意的非空集. 但当 $|A|<\kappa$ 时，绝大多数 F_ξ^ζ 都是空集，这个结论成为平凡的，实际应用时通常都应假定 $|A|\geqslant\kappa$.

1.11.3 引理(CH) 存在两个集族 $\{K_0(\alpha):\alpha<\omega_1\}$ 和 $\{K_1(\alpha):\alpha<\omega_1\}$，它们满足如下条件：

(1) $\forall\alpha<\omega_1,K_0(\alpha)\cup K_1(\alpha)=\alpha$.

(2) 对 $[\omega_1]^{<\omega}$ 的每个可数互斥族 $\{F^n:n<\omega\}=\mathscr{F}$，存在 $\beta<\omega_1$，使得当 $\beta<\alpha,\bigcup\mathscr{F}\subset\alpha,X\in[\alpha]^{<\omega}$ 时，对 $\varepsilon=0,1$，若有

$$|\{i<\omega:(F^i\otimes X)\cap K_\varepsilon=\varnothing\}|=\omega,$$

则 $|\{i<\omega:(F^i\otimes(X\cup\{\alpha\}))\cap K_\varepsilon=\varnothing\}|=\omega$.

(此处的记号 $A\otimes B=\{\{a,b\}:a\in A,b\in B\}$，$K_\varepsilon=\bigcup\{K_\varepsilon(\alpha)\otimes\{\alpha\}:\alpha<\omega\}$.)

证明 当 $\alpha=0$ 时，定义 $K_0(0)=K_l(0)=\varnothing$.

对于 $0<\alpha<\omega_1,\varepsilon=0,1$，我们将按归纳的方式定义 $K_\varepsilon(\alpha)$，使它们满足如下的归纳条件：

(1) $K_0(\alpha)\cup K_1(\alpha)=\alpha$，而 $K_0(\alpha)\cap K_1(\alpha)=\varnothing$.

(2) 对每个由 $[\omega_1]^{<\omega}$ 的元组成的可数互斥族 $\mathscr{F}=\{F^i:i<\omega\}$，存在 $\beta<\omega_1$，当 $\beta<\alpha<\omega_1$，并且 $\bigcup\mathscr{F}\subset\alpha,X\in[\alpha]^{<\omega}$ 时，对 $\varepsilon=0,1$，若 $|\{i:F^i\otimes X\subset\bigcup\{K_\varepsilon(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta<\alpha\}\}|=\omega$，则 $|\{i:F^i\otimes(X\cup\{\alpha\})\subset\bigcup\{K_\varepsilon(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta\leqslant\alpha\}\}|=\omega$.

注意由 $[\omega_1]^{<\omega}$ 的元组成的可数互斥族的全体不超过 $|[\omega_1]^{<\omega}|^\omega$

$=\omega_1{}^{\omega}=\omega_1$ 个,故可以将它们排列成$\{\mathscr{F}_\zeta:\zeta<\omega_1\}$.

当 $\alpha<\omega$ 时,令 $K_0(\alpha)=\varnothing, K_1(\alpha)=\alpha$.

现在设 $\alpha\geqslant\omega$,并且假定对所有 $\eta<\alpha, K_\epsilon(\eta)$均已定义好.对给定的 α,三元组(ϵ,ζ,X)称为恰当的,如果它满足下面的条件:

$$\epsilon=0,1,\zeta<\alpha,\bigcup\mathscr{F}_\zeta\subset\alpha, X\in[\alpha]^{<\omega},$$

并且

$$|\{i:F_\zeta^i\otimes X\subset\bigcup\{K_\epsilon(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta<\alpha\}\}|=\omega.$$

所有这种恰当的三元组个数不超过$2\times|\alpha|\times|\alpha|=\omega$ 个.将它们排成$\{(\epsilon_n,\zeta_n,X_n):n<\omega\}$,令

$$I_n=\{i:F_{\zeta_n}^i\otimes X_n\subset\bigcup\{K_\epsilon(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta<\alpha\}\}.$$

在引理 1.11.2 中,取 $\kappa=\omega$,以 α 代替 A, $F_{\zeta_n}^i$ 代替 F_ξ^i,可以断言存在 α 的划分 $K_0(\alpha)$和 $K_1(\alpha)$,使

$$\left|\{i\in I_n:F_{\zeta_n}^i\subset K_\epsilon(\alpha)\}\right|=\omega.\qquad(\epsilon=0,1)$$

这样就完成了构造 $K_\epsilon(\alpha)$的归纳步骤,得出$\{K_\epsilon(\alpha):\alpha<\omega_1\},\epsilon=0,1$.

归纳条件(1)是显然满足的.现在设$\mathscr{F}$是由$[\omega_1]^{<\omega}$的元组成的一个可数互斥族,并被排列为$\mathscr{F}_\beta$.当 $\beta<\alpha<\omega_1,\bigcup\mathscr{F}_\beta\subset\alpha, X\in[\alpha]^{<\omega}$时,对 $\epsilon=0,1$,若

$$|\{i:F_\beta^i\otimes X\subset\bigcup\{K_\epsilon(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta<\alpha\}\}|=\omega,$$

则(ϵ,β,X)是关于 α 的一个恰当的三元组.设它被排列为(ϵ_n,ζ_n,X_n),这时由 $K_\epsilon(\alpha)$的定义,存在 ω 个 i,使 $i\in I_n, F_{\zeta_n}^i\subset K_\epsilon(\alpha)$,即

$$F_\beta^i\otimes X\subset\bigcup\{K_\epsilon(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta<\alpha\},$$

$$F_\beta^i\otimes\{\alpha\}\subset K_\epsilon(\alpha)\otimes\{\alpha\}.$$

从而有

$$F_\beta^i\otimes(X\cup\{\alpha\})\subset\bigcup\{K_\epsilon(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta\leqslant\alpha\}.$$

所以归纳条件(2)也满足.

现在来证明所作的$\{K_\epsilon(\alpha):\alpha<\omega_1\}(\epsilon=0,1)$符合定理的要求.

第一个条件是明显地满足的.

设$\mathscr{F}$是由$[\omega_1]^{<\omega}$的元组成的一个可数互斥族,$\mathscr{F}=\mathscr{F}_\beta$.设 $\alpha>\beta$,使

$\bigcup\mathscr{F}\subset\alpha, X\in[\alpha]^{<\omega}, \varepsilon=0,1$.又假设$|\{i:(F_\beta^i\otimes X)\cap K_\varepsilon=\varnothing\}|=\omega$.记$\varepsilon'=1-\varepsilon$.注意$K_\varepsilon(\eta)\cup K_{\varepsilon'}(\eta)=\eta$.若$i$使得$(F_\beta^i\otimes X)\cap K_\varepsilon=\varnothing$,则对所有$\eta<\alpha$,有$(F_\beta^i\otimes X)\cap(\bigcup\{K_\xi(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta<\alpha\})=\varnothing$.因为$F_\beta^i\otimes X\subset\alpha\otimes\alpha$,所以$F_\beta^i\otimes X$的每个元都可表示成$\{\eta,\eta'\}$的形式,其中$\eta<\eta'<\alpha$.但$\{\eta,\eta'\}\notin K_\varepsilon(\eta')\otimes\{\eta'\}$,所以$\{\eta,\eta'\}\in K_{\varepsilon'}(\eta')\otimes\{\eta'\}$.于是有$F_\beta^i\otimes X\subset\bigcup\{K_{\varepsilon'}(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta<\alpha\}$,因而有

$$|\{i:(F_\beta^i\otimes X)\subset\bigcup\{K_{\varepsilon'}(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta<\alpha\}\}|=\omega.$$

由归纳假设,有

$$|\{i:F_\beta^i\otimes(X\cup\{\alpha\})\subset\bigcup\{K_{\varepsilon'}(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta\leqslant\alpha\}\}|=\omega.$$

但若$F_\beta^i\otimes(X\cup\{\alpha\})\subset\bigcup\{K_{\varepsilon'}(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta\leqslant\alpha\}$,则也有$F_\beta^i\otimes(X\cup\{\alpha\})\cap(\bigcup\{K_\varepsilon(\eta)\otimes\{\eta\}:\eta\leqslant\alpha\})=\varnothing$.又当$\eta>\alpha$时,有$\eta\notin F_\beta^i,\eta\notin X\cup\{\alpha\}$,所以$F_\beta^i\otimes(X\cup\{\alpha\})\cap(K_\varepsilon(\eta)\times\{\eta\})=\varnothing$.于是$F_\beta^i\otimes(X\cup\{\alpha\})\cap K_\varepsilon=\varnothing$.由此即得

$$|\{i:F_\beta^i\otimes(X\cup\{\alpha\})\cap K_\varepsilon=\varnothing\}|=\omega.$$

于是引理得证. □

1.11.4 定理(CH) 存在一个极不连通,紧T_2,CCC空间X,它的平方不是CCC空间.

证明 分成两个步骤.

第一步:证明存在两个拓扑空间X_0和X_1,使得$c(X_0)=c(X_1)=\omega$,但$c(X^2)>\omega$(此处$c(X)$是X的胞腔度(cellularity),其定义为

$$c(X)=\omega\cdot\min\{|\mathscr{U}|:\mathscr{U}\text{为}X\text{的互斥开集族}\},$$

$c(X)=\omega$即表示X是CCC空间).

取X_0和X_1的装备集都是$2^{\omega_1}-\{0\}$(0表示零函数).设$\{K_\varepsilon(\eta):\eta<\omega_1\}(\varepsilon=0,1)$是引理1.11.3所设的集族.对$\varepsilon=0,1,\eta<\omega_1$,记

$$V_\varepsilon(\eta)=\{x\in X_\varepsilon:x\upharpoonright_{K_\varepsilon(\eta)}\equiv0,x(\eta)=1\}.$$

取$\{V_\varepsilon(\eta):\eta<\omega_1\}$作为$X_\varepsilon$的子基生成$X_\varepsilon$的拓扑.

论断1 X_ε是CCC空间.

设$\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是$X_\varepsilon$中一族基本开集.$U_\alpha=\bigcap\{V_\varepsilon(\eta):\eta\in$

$G_\alpha\}$, $G_\alpha\in[\omega_1]^{<\omega}$. 这时，若 $x\in U_\alpha$，则 $x\restriction_{G_\alpha}\equiv 1$，而 x 在 $\bigcup\{K_\varepsilon(\eta):\eta\in G_\alpha\}$ 上恒等于 0，所以有 $G_\alpha\cap(\bigcup\{K_\varepsilon(\eta):\eta\in G_\alpha\})=\varnothing$. 利用 Δ 系统引理，不失普遍性，可以假定 $\{G_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是一个以 J 为根的 Δ 系统. 令 $F^\alpha=G_\alpha-J$，则 $\{F^\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 $[\omega_1]^{<\omega}$ 的元组成的互斥族，并且不妨假定所有的 $F^\alpha\neq\varnothing$. 记 $\mathscr{F}=\{F^i:i<\omega\}$，设 β 是满足引理 1.11.3 中所述条件(2)的序数，并且不妨进一步设 $\bigcup\mathscr{F}\subset\beta$. 这时存在 α，使 $\omega<\alpha$，并且 $F^\alpha\cap(\beta+1)=\varnothing$. 若 $\eta\in F^\alpha$，则有 $\eta>\beta$, $\bigcup\mathscr{F}\subset\eta$. 设 $F^\alpha=\{\eta_1,\cdots,\eta_n\}$，其中 $\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_n$.

由于 $F^i\otimes\varnothing=\varnothing$，对每个 i，有

$$(F^i\otimes\varnothing)\cap(\bigcup\{K_\varepsilon(\eta')\otimes\{\eta'\}:\eta'<\eta_1\})=\varnothing,$$

即 $|\{i:(F^i\otimes\varnothing)\cap(\bigcup\{K_\varepsilon(\eta')\otimes\{\eta'\}:\eta'<\eta_1\})=\varnothing\}|=\omega$.

于是 $|\{i:(F^i\otimes\varnothing)\cap K_\varepsilon=\varnothing\}|=\omega$.

从而由引理 1.11.3，有

$$|\{i:(F^i\otimes\{\eta_1\})\cap K_\varepsilon=\varnothing\}|=\omega.$$

再一次应用引理 1.11.3，有

$$|\{i:(F^i\otimes\{\eta_1,\eta_2\})\cap K_\varepsilon=\varnothing\}|=\omega.$$

继续下去，最后有

$$|\{i:(F^i\otimes F^\alpha)\cap K_\varepsilon=\varnothing\}|=\omega.$$

取定一个 i，使 $(F^i\otimes F^\alpha)\cap K_\varepsilon=\varnothing$. 对任意一个 $\eta\in F^\alpha$，由 $(F^i\otimes\{\eta\})\cap(K_\varepsilon(\eta)\otimes\{\eta\})=\varnothing$，得到 $F^i\cap K_\varepsilon(\eta)=\varnothing$. 于是

$$F^i\cap(\bigcup\{K_\varepsilon(\eta):\eta\in F^\alpha\})=\varnothing.$$

另外，$F^i\cap(\bigcup\{K_\varepsilon(\eta):\eta\in J\})\subset F^i\cap(\bigcup\{K_\varepsilon(\eta):\eta\in G_i\})=\varnothing$，

由 $G_\alpha=F^\alpha\cup J$ 可知

$$F^i\cap(\bigcup\{K_\varepsilon(\eta):\eta\in G_\alpha\})=\varnothing.$$

同理，$F^\alpha\cap(\bigcup\{K_\varepsilon(\eta):\eta\in G_i\})=\varnothing$.

再由 $G_i\cap(\bigcup\{K_\varepsilon(\eta):\eta\in G_i\})=\varnothing$ 及 $G_\alpha\cap(\bigcup K_\varepsilon(\eta):\eta\in G_\alpha)=\varnothing$，得到 $J\cap(\bigcup\{K_\xi(\eta):\eta\in G_i\cup G_\alpha\})=\varnothing$. 所以可以定义一个 x，使 x

在 $G_i\cup G_\alpha$ 上取值 1 而在 $\bigcup\{K_\varepsilon(\eta):\eta\in G_i\cup G_\alpha\}$ 上取值 0. 这时 $x\in U_i\cap U_\alpha$. 这就证明了 $\mathscr{U}$ 不是互斥族，于是 X_ε 是 CCC 空间.

论断 2 $X_0\times X_1$ 不是 CCC 空间.

取 $\{W(\eta)=V_0(\eta)\times V_1(\eta):\eta<\omega_1\}$.

假若有 $\langle x_0,x_1\rangle\in[(V_0(\eta)\times V_1(\eta)]\cap[V_0(\eta')\times V_1(\eta')]$, $\eta<\eta'$. 这时 $x_0\in V_0(\eta)\cap V_0(\eta')$. 因为 $\eta'=K_0(\eta')\cup K_1(\eta')$，所以 $\eta\in K_0(\eta')$ 或 $\eta\in K_1(\eta')$. 若 $\eta\in K_0(\eta')$，则由 $x_0\in V_0(\eta')$，得 $x_0(\eta)=0$，但 $x_0\in V_0(\eta)$，故 $x_0(\eta)=1$，矛盾. 若 $\eta\in K_1(\eta')$，同理也可以推出 $x_1(\eta)=0$ 和 $x_1(\eta)=1$，矛盾. 这就证明了 $\{W(\eta):\eta<\omega_1\}$ 是互斥的基本开集族.

第二步：由 X_0 和 X_1 构造出定理所要求的空间.

记由 $X_\varepsilon(\varepsilon=0,1)$ 的全体正则开集（即满足 $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\,U)=U$ 的开集 U）构成的集为 $\boldsymbol{R}(X_\varepsilon)$. 设 $U,V\in\boldsymbol{R}(X_\varepsilon)$. 定义 $U\wedge V==U\cap V$, $U'=\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}(X_\varepsilon-U)$. 容易验证 $(\boldsymbol{R}(X_\varepsilon),\wedge,')$ 构成一个 Boole 代数，设 $G(X_\varepsilon)$ 是由 $\boldsymbol{R}(X_\varepsilon)$ 生成的 Stone 空间，即

$$G(X_\varepsilon)=\{p:p\text{ 为 }\boldsymbol{R}(X_\varepsilon)\text{上的 uft}\},$$

并以 $\{B^*=\{p:B\in p\}:B\in\boldsymbol{R}(X_\varepsilon)\}$ 作为 $G(X_\varepsilon)$ 的基. 这时空间 $G(X_\varepsilon)$ 具有如下的性质：

(1) $G(X_\varepsilon)$ 是紧 T_2 空间.

设 $p_1,p_2\in G(X_\varepsilon)$, $p_1\neq p_2$. 则存在 $B\in\boldsymbol{R}(X_\varepsilon)$，使 $B\in p_1$, $B\notin p_2$. 这时 $B'\in p_2$, $B'\notin p_1$. 于是 B^* 和 $(B')^*$ 是 p_1,p_2 的不相交邻域，因此 $G(X_\varepsilon)$ 是 T_2 的.

若 $\{B^*:B\in\mathscr{B}\}$ 是 $G(X_\varepsilon)$ 的某个开覆盖. 注意每个 uft 都是素滤子，我们有 $(\bigvee_{i=1}^{n}B_i)^*=\{p:\bigvee_{i=1}^{n}B_i\in p\}=\bigcup_{i=1}^{n}\{p:B_i\in p\}=\bigcup_{i=1}^{n}B_i^*$. 另一方面，又有 $(\bigvee_{i=1}^{n}B_i)^*=\{p:\bigvee_{i=1}^{n}B_i\in p\}=\{p:\bigwedge_{i=1}^{n}B'_i\notin p\}$. 假如这个开覆盖没有有限子覆盖，那么对任何 $J\in[\mathscr{B}]^{<\omega}$, $\bigcup\{B^*:B\in J\}\neq G(X_\varepsilon)$. 于是存在 p，使 $p\notin\bigcup\{B^*:B\in J\}=(\bigvee\{B:B\in J\})^*$，即 $\bigvee\{B:B\in J\}\notin p$. 于是 $\bigwedge\{B':B\in J\}\neq 0$, $\{B':B\in J\}$ 就构成了一个滤子基. 记 p_0 是由

它生成的一个 uft，则对任何 $B\in\mathscr{B}$, $p_0\in B^*$. 这与 $\{B^*: B\in\mathscr{B}\}$ 是 $G(X_\varepsilon)$ 的覆盖的假设矛盾.

(2) $G(X_\varepsilon)$ 是 0 维和极不连通的.

对每个 $B\in\boldsymbol{R}(X_\varepsilon)$，显然有 $B^*\cup(B')^*=(B\vee B')^*=1^*=G(X_\varepsilon)$, $B^*\cap(B')^*=(B\wedge B')^*=0^*=\varnothing$. 所以每个 B^* 都是开闭集，因而 $G(X_\varepsilon)$ 是 0 维的.

设 $\mathscr{B}\subset\boldsymbol{R}(X_\varepsilon)$ 是不空的. 令 $U=\mathrm{Int\ Cl}(\bigcap\{B: B\in\mathscr{B}\})$，则 $U\in\boldsymbol{R}(X_\varepsilon)$. 对每个 $B\in\mathscr{B}$，显然有 $U\subset\mathrm{Int\ Cl}\ B$，即 $U\leqslant B$. 所以 U 是 $\mathscr{B}$ 的下界. 又假如 $V\in\boldsymbol{R}(X_\varepsilon)$ 也是 $\mathscr{B}$ 的下界，则对每个 $B\in\mathscr{B}$，有 $V\subset B$. 于是 $V\subset\bigcap\{B: B\in\mathscr{B}\}$. 而 $V=\mathrm{Int\ Cl}\ V\subset\mathrm{Int\ Cl}(\bigcap\{B: B\in\mathscr{B}\})=U$，这表明 $U=\mathrm{Inf}\,\mathscr{B}=\wedge\mathscr{B}$，从而 $(\boldsymbol{R}(X_\varepsilon),\wedge,')$ 是一个完备的 Boole 代数.

现在，设 U 是 $G(X_\varepsilon)$ 中任意一个开集，$U=\bigcup\{B^*: B\in\mathscr{B}\}$，则有 $U\subset(\vee\mathscr{B})^*$. 今证明 $\mathrm{Cl}\ U=(\vee\mathscr{B})^*$. 由于 $\vee\mathscr{B}\in\boldsymbol{R}(X_\varepsilon)$，$(\vee\mathscr{B})^*$ 就是一个开闭集，因此 $\mathrm{Cl}\ U\subset(\vee\mathscr{B})^*$. 另一方面，若 $p\in(\vee\mathscr{B})^*$，则 $\vee\mathscr{B}\in p$. 所以对任何 $C\in p$，有 $C\wedge(\vee\mathscr{B})\neq 0$. 于是存在 $B\in\mathscr{B}$，使 $C\wedge B\neq 0$. 即 $C^*\cap B^*=(C\wedge B)^*\neq\varnothing$. 因此 $p\in\mathrm{Cl}\ U$. 这便证明了 $G(X_\varepsilon)$ 的任何开集有又开又闭的闭包，即 $G(X_\varepsilon)$ 是极不连通的.

(3) $G(X_\varepsilon)$ 是 CCC 空间.

设 $B_1, B_2\in\boldsymbol{R}(X_\varepsilon)$. 则由 $(B_1\wedge B_2)^*=B_1^*\cap B_2^*$，可知 $B_1^*\cap B_2^*=\varnothing$ 当且仅当 $B_1\wedge B_2=0$，即 $B_1\cap B_2=\varnothing$. 由于 X_ε 是 CCC 的，所以 $G(X_\varepsilon)$ 也是 CCC 的.

(4) $G(X_0)\times G(X_1)$ 不是 CCC 的.

注意：
$$\begin{aligned}(B_1^*\times C_1^*)\cap(B_2^*\times C_2^*)&=(B_1^*\cap B_2^*)\times(C_1^*\cap C_2^*)\\&=(B_1\cap B_2)^*\times(C_1\cap C_2)^*.\end{aligned}$$

所以 $(B_1^*\times C_1^*)\cap(B_2^*\times C_2^*)=\varnothing$ 当且仅当 $B_1\cap B_2=\varnothing$ 或 $C_1\cap C_2=\varnothing$. 这又等价于 $(B_1\times C_1)\cap(B_2\times C_2)=\varnothing$. 已知 $X_0\times X_1$ 不是 CCC 的，所以 $G(X_0)\times G(X_2)$ 也不是 CCC 空间.

最后，取 $X=G(X_0)\oplus G(X_1)$，则 X 是一个紧 T_2，0 维，极不连通 CCC 空间. 注意

$$X^2 = G(X_0)\times G(X_0)\oplus G(X_0)\times G(X_1)$$
$$\oplus G(X_1)\times G(X_0)\oplus G(X_1)\times G(X_1).$$

因为 $G(X_0)\times G(X_1)$是 X^2 的开子空间,它不是 CCC 的,所以 X^2 也不是 CCC 空间. □

在第四章§1中,我们将指出在存在 Suslin 线的前提下,存在连通的,第一可数的,紧 T_2CCC 空间,其平方不是 CCC 的.

§12 后 记

除本章§1~§11介绍的外,连续统假设应用于其他方面问题的研究,也取得了丰富的成果.

一、与连续统假设等价的拓扑学命题

除§1的 Rothberger 定理和§5的结果外,van Douwen, Fedocuk, Malyhin, Dow, van Mill 和 Vermer 等也得到了一些结果,下列各命题都是与 CH 等价的.

1.12.1 每个第一可数的紧 T_2 空间都是 $\aleph$-α-扩张的(Fedocuk [1978]).

在这里,称空间 X 是 τ-α-扩张的(τ 是基数),如果存在 X 的一个全序$\leqslant$,使得对每个 $x\in X$, $\overline{(-\infty,x)}-(-\infty,x)$的势$\leqslant\tau$.

1.12.2 每个可数紧正规 F 空间 X 满足 $c(X)=2^{\omega}$ 时是紧的(van Douwen[1979]).

1.12.3 每个局部紧正规 F 空间 X 满足 $c(X)=2^{\omega}$ 时是 σ-紧的(van Douwen[1979]).

1.12.4 每个 F 空间 X 满足 $c(X)=2^{\omega}$ 时是弱 Lindelöf 的(van Douwen[1979]).

1.12.5 广义 Cantor 空间 D^{ω_1} 的绝对化是一个 Noether 空间(Malyhin[1981]).

集族 $\mathscr{B}$ 称为 Noether 的,如果 $\mathscr{B}$ 中的每个不空集 A, $|\{B:B\in\mathscr{B}, A\subset B\}|<\omega$. X 称为 Noether 空间,如果 X 有一个 Noether 基.

1.12.6 每个权等于2^{ω} 的 F 空间的开子空间都是 F 空间(Dow

[1983]).

1.12.7 存在非伪紧的空间 X,其所有的紧化都是 Wallman 紧化(van Mill, Vermer[1979]).

二、与度量化有关的问题

1.12.8 CH⇒存在不可度量的全正规,局部连通的紧 T_2 空间(Fillipov[1969]).

1.12.9 Burke, Davis[1981]利用 CH 构造了一个全正规的紧 T_2 空间 Z,它有一个不可度量化的对称(Symetrizable)子空间,否定地回答了 Arhangelskii 的两个问题.

1.12.10 Tkacenko[1981]利用 CH 构造了一个不可度量的紧 T_2 空间,其中每一个弱扩张(Weakly expanded)子空间都是可数的.

1.12.11 拓扑空间 X 的对角线 Δ 称为小对角线,如果 $X^2-\Delta$ 的任何一个不可数子集 A 都对应有包含 Δ 的一个开集 U,使 $A-U$ 是不可数的.显然,若 X 有 G_δ 对角线,则 X 也有小对角线.一个自然的问题是:有小对角线的紧 T_2 空间是可度量的吗? Husek[1977]在 CH 下给出了部分回答.

1.12.12 **定理(CH)** 设 X 是有小对角线的紧 T_2 空间,并且 $t(X)=\omega$,则 X 是可度量的($t(X)$的定义见 2.10.3).

周浩旋[1982a]中证明了:

Con(ZFC + CH + 有小对角线的紧 T_2 空间是可度量的).

Juhasz, Szentmiklosy[1992]进一步证明了:

1.12.13 **定理** CH⇒有小对角线的紧 T_2 空间是可度量的.

到现在为止,似乎还未发现有小对角线而不可度量的紧 T_2 空间的相容性反例.

三、与紧性有关的结果

除 Fedocuk[1978], Tkaceako[1981],周浩旋[1982a]等前面已提到的结果外,还可参看 Rudin[1965], Jacovlev[1976], Malyhin[1982],[1984], Cigogidze[1981], Watson[1994], Bell[1985]等.

1.12.14 **定理** CH⇒存在序列紧非紧的空间,它有一个局部紧的可分度量子空间作为它的稠密集(Rudin[1965]).

1.12.15 定理 CH⇒存在紧 T_2 的 g-第一可数空间,它不是第一可数的(Jacovlev[1976]).

根据 Arhangelskii[1966]提出的定义,拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的一个弱基,如果对每个 $x\in X$,对应有 $\mathscr{P}_x\subset\mathscr{P}$,使得

(1) $x\in\bigcap\mathscr{P}_x$, $\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_x, x\in X\}$;

(2) $U, V\in\mathscr{P}_x$,则存在 $W\in\mathscr{P}_x$,使 $W\subset U\cap V$;

(3) G 是开集当且仅当 $\forall x\in G$, $\exists U\in\mathscr{P}_x$,使 $U\subset G$.

如果每个 $\mathscr{P}_x$ 都是可数的,就称 X 是 g-第一可数(弱第一可数)空间.若 X 有 σ-局部有限的弱基,X 就称为 g-可度量空间(Siwiec[1974]).

1.12.16 定理 CH⇒存在 g-第一可数的紧 T_2 空间 X, $|X|>2^{\omega}$,其中至少有一个点 x 使 $\chi(x,X)=|X|>\omega$(Malyhin[1982]).

Cigogidze[1981]证明了下面定理.

1.12.17 CH⇒存在全正规紧 T_2 空间 X,它没有 Dugundji 扩张性质.

Watson[1994]证明了下面定理.

1.12.18 CH⇒存在第一可数的伪紧的连通空间,它没有相对紧的稠密子集.

Malyhin[1994]证明了下面定理.

1.12.19 CH⇒在群 2^{ω_1} 中可以作出一个势为可数的稠密子群 S,使 $\Sigma(S)=\bigcup\{\Sigma(a):a\in S\}$ 是可数紧的.

在这里,$\Sigma(a)$ 表示 a 的 Σ 积,即

$$\Sigma(a)=\{f:f\in 2^{\omega_1}, |\{\alpha:f(\alpha)\neq a(\alpha)\}|\leqslant\omega\}.$$

Bell[1980]证明了下面定理.

1.12.20 定理(CH) 存在紧 T_2CCC 空间,它没有 σ-定心基.(σ-定心基的概念参看 1.2.7,注意可分空间一定有 σ-定心基.)

四、广义度量空间

刘应明[1978]在研究两个 CW 复形的乘积时,应用 CH 证明了下面定理.

1.12.21 定理(CH) 设 K、L 是 CW 复形,则 $K\times L$ 仍是 CW 复形的充要条件是:或者 K、L 之一是局部有限的,或者 K、L 都是局部可数

的.

这个结论后来被 Tanaka[1982]推进了一步,被证明了等价于另一个集论命题$\neg$ BF(ω_2).

Tanaka[1979]讨论了两个 Lasnev 空间(即度量空间的闭映射像)之积是 k 空间的条件问题,他得出了如下结果:

1.12.22 定理(CH) 设 X,Y 是 Lasnev 空间,则 $X\times Y$ 是 k 空间当且仅当 X,Y 满足下列条件之一:

(1) X,Y 都是可度量的;

(2) X,Y 之一是局部紧可度量空间;

(3) X,Y 都属于类 $\mathscr{T}$.

在这里,类 $\mathscr{T}=\{X$:存在$\{X_n:n<\omega\}$,使得:① $\forall n$, X_n 是 X 的局部紧闭子空间;② $X=\bigcup\limits_n X_n$;③ $A\subset X$ 是闭集当且仅当对每个 n, $A\cap X_n$ 是子空间 X_n 中的闭集$\}$.换言之,$X\in\mathscr{T}$意即 X 是一个由闭的局部紧可度量子空间组成的序列所控制的空间.

在 Tanaka[1979]中,他还在 Tanaka[1978]的基础上得出了如下结果.

1.12.23 定理(CH) 设 X 是 Frechet 空间或具有点 G_δ 性质(即 $\psi(X)=\omega$)的 k 空间.又设 Y 是一个第一可数仿紧空间在某个闭映射 f 下的像,若 $X\times Y$ 是 k 空间,则要么 X 是强 Frechet 的,要么对每个 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$的边界 $\partial f^{-1}(y)$是局部紧 Lindelöf 的.

1.12.24 定理(CH) 设 X_1,X_2 是仿紧、局部紧 Frechet 空间,f_1,f_2 是 X_1,X_2 上定义的闭映射,$Y_1=f(X_1)$,$Y_2=f(X_2)$,则 $Y_1\times Y_2$ 是 k 空间(等价于 $f_1\times f_2$ 是 $X_1\times X_2$ 上的商映射)的充要条件是下列命题之一满足:

(1) $\forall y\in Y_1$, $\partial f^{-1}(y)$是紧的,或$\forall y\in Y_2$, $\partial f^{-1}(y)$是紧的;

(2) $\forall y\in Y_1$ 或 $y\in Y_2$, $\partial f_1^{-1}(y)$和 $\partial f_2^{-1}(y)$都是 Lindelöf 的.

这里的强 Frechet 性是指,对任意点 x 和任一满足 $x\in\bigcap\limits_n\bar{A}_n$ 的下降序列$\{A_n:n<\omega\}$,存在 $x_n\in A_n$,使得序列$\{x_n:n<\omega\}$收敛于 x.

高智民[1987]在研究 Lasnev 空间与$\aleph$空间的关系时得到以下定

理.

1.12.25 定理(CH) Lasnev 空间 X 是(Frechet)$\aleph$空间的充要条件是它的特征 $\chi(X)\leqslant c$.

刘川[1993]在研究具有 σ-HCP k 网的性质与$\aleph$空间的关系时证明了以下定理.

1.12.26 定理(CH) 可分的有 σ-HCP k-网的空间是$\aleph$空间.

(恽自求[1993]在承认 MA+$\neg$ CH 的情况下否定了上述命题.运用 MA+$\neg$ CH,他作出了一个正规、可分、有 σ-HCP k 网的空间,它不是$\aleph$空间.)

另外,刘川和 Tanaka[1996a]还证明了:

1.12.27 定理(CH) 若 X 是k 空间,有由可分子集构成的 σ-HCP k 网,则 X 有星可数k 网.

(集族 $\mathscr{A}$ 称为星可数的,如果$\forall A\in\mathscr{A}$, $\mathrm{ord}(A,\mathscr{A})=|\{A'\in\mathscr{A}: A'\cap A\neq\varnothing\}|\leqslant\omega$.这个概念最早出现于 Heath[1964],是在研究可遮空间的刻画时提出的.)

在刘川和 Tanaka[1996b]中,他们还得到了下面定理.

1.12.28 定理(CH) 设 X 是有σ-紧有限k-网的k 空间,则 X 是局部可分的当且仅当X 是$\aleph$空间的拓扑和.

1.12.29 定理(CH) 有 σ-CS 有限弱基的可分空间是 g-第二可数空间.有 σ-CS 有限弱基的空间如果不含 S_2 的拷贝,则它是可度量的.

这里的 S_2 即所谓的 Arens 空间,其定义可参看 Engelking[1977]的1.6.20或林寿[1995]的1.8.6.

1971 年,Hodel 证明了有 G_δ^* 对角线的 $W\Delta$ 空间是可展的之后,提出了下述问题:有 G_δ 对角线的 $W\Delta$ 空间是否一定是可展的?

Alster, Burke, Davis[1988]在 CH 下给出了一个否定的回答.他们应用 CH 作出了一个0维、散射、局部紧、有 G_δ 对角线的 $W\Delta$ 空间,它不是可展的. Balogh[1987]进一步指出,上述例子中实际上可以用一个比 CH 更弱一些的集论命题 $b=2^\omega$ 来取代 CH.

他们在较强的分离性下也给出了一些肯定的答案.

1.12.30 定理 设 X 是有 G_δ 对角线的 $W\Delta$ 空间，若 X 是局部 Lindelöf和 ω-SCWH(ω 强族 Hausdorff)的，则 X 是可展的．特别地，若 X 是局部紧(或局部 Lindelöf)和正规(或可数仿紧)的，则 X 是可展的．

1.12.31 定理 具有 σ-局部有限(mod k)网的空间称为强$\sum$空间(参看 Gruenhage[1984a]的 4.13)．每个 σ 空间都是遗传强$\sum$空间．

Balogh[1984]证明了如下定理．

1.12.32 定理(CH) 设 X 是 Lindelöf 空间，$\psi(X)=\omega$，则 X 是σ 空间当且仅当它是一个遗传强$\sum$空间．

在同一篇论文中，他还指出，在 MA + ┐ CH 下，可以作出一个第一可数、Lindelöf、遗传仿紧的遗传强$\sum$空间，它不是 σ 空间．

五、乘积空间

在研究拓扑空间的乘积问题方面，CH 最早的应用恐怕属于 Michael[1971]．他用 CH 构造了一个正则 Lindelöf 空间 X，它和实直线上的无理数集 P 的乘积 $X\times P$ 不是正规的．

满足 $X\times P$ 非正规(非 Lindelöf)的正则 Lindelöf 空间 X 称为 Michael 空间．这样，Michael 用 CH 给出了第一个例子，Alster[1992]用 MA 也给出了例子，Lawrence[1990]只用 $b=\omega_1$ 就给出了例子．但迄今尚不知有没有绝对的 Michael 空间．

在全正规空间的乘积问题上，Alster，Zenor[1976a]证明了如下定理．

1.12.33 定理(CH) 对任意 $n>1$，存在正规第一可数空间 Y，使得

(1) Y^n 是全正规，遗传可分的；

(2) Y^{n-1}是 Lindelöf 空间，但 Y^n 不是次仿紧的．

Przymusinski[1980b]进一步证明了以下定理．

1.12.34 定理(CH) 对每个 n，存在正规可分第一可数空间 X，使得

(1) X^n 是遗传 Lindelöf 的(从而是全正规的)；

(2) X^{n-1}是 Lindelöf 但不是遗传 Lindelöf(从而不是全正规的)．

1.12.35 定理(CH) 对每个 n，存在正则可分第一可数空间 X，

使得

(1) X^n 是全正规的;

(2) X^{n-1}是正规,但不是遗传正规的.

Starbird 在 Rudin[1975]中提出是否有两个非 Dowker 空间,其乘积空间却是 Dowker 空间? Wage[1978]给出了一个答案.

1.12.36 定理(CH) 存在非 Dowker 空间 X, Y,使得 $X \times Y$ 是一个 Dowker 空间.

但在他的文章中并没有给出论证.这个结论直到 1990 年才由 Beslagic 正式发表证明.

Nogura[1979]证明了下面定理.

1.12.37 定理(CH) 存在正则 Frechet 空间 X, Y,使得 $X \times Y$ 不能作为一个序列空间的子空间嵌入有 $t(X)=\omega$ 的可数紧正则空间.

另外,Nogura[1985]证明了下面定理.

1.12.38 定理(CH) 存在强 Frechet 空间 X, Y 和 $X \times Y$ 的一个子空间 W,使 W 是一个不可度量的 Lasnev 空间.

根据 Sneider 和 Chaber 的著名结果,当 X 是紧 T_2 或可数紧正则空间时,只要 X 有 G_δ 对角线,X 就是可度量的.因此,一个问题是,若 X 是紧 T_2 或可数紧正则空间,当 $X \times X$ 是遗传正规的时候,X 是否一定可度量?(注意遗传正规是比全正规稍弱一些的性质,而 Alexandroff 双箭空间则是紧的不可度量空间而它的平方是正规空间的例子).

Nyikos[1977]证明了下面定理.

1.12.39 定理(MA+¬ CH) 存在紧 T_2 不可度量空间 X,它的平方是遗传正规的.

Gruenhage 和 Nyikos[1991]用 CH 也得出了相同的结果.

1.12.40 定理(CH) 存在紧 T_2 不可度量的空间 X,使 X^2 是遗传正规的.

在§11 中应用 CH 我们给出了一个紧 T_2、CCC 空间 X,使 X^2 不是 CCC 的. Galvin[1981]应用 CH 作出了两个第一可数 CCC 空间,其乘积不是 CCC 的.

现在介绍一个由正则第一可数空间产生 Moore 空间的机器如下:

设 X 是一个正则第一可数空间，对每个 $x\in X$，取定一个满足 $\overline{U_{n+1}(x)}\subset U_n(X)$ 的可数局部基. $\forall m>0$，设 $A_m=\{(n_1,n_2,\cdots,n_m):n_1=1,\forall i,1\leqslant i\leqslant m,n_i$ 是正整数$\}$. 记 $A=\bigcup\limits_m A_m$，设 $a=(n_1,\cdots,n_m)\in A$. 记 S_a 为 X 的唯一拷贝，使所有这些拷贝全不相交，并且对 $x\in X$，用 $(x_{n_1},\cdots,x_{n_m})$ 表示 S_a 中与 x 恒等的元素. 令 $M(X)=\bigcup\{S_a:a\in A\}$. 定义 $M(X)$ 中的一个展开如下：

对任意 $j\in\mathbf{N}$，$a=(n_1,\cdots,n_m)\in A$ 和 $p=(y_{n_1},\cdots,y_{n_m})\in S_a$，令

$$g_j(p)=\{p\}\cup\{(x_{n_1},\cdots,x_{n_m},x_{k_1},\cdots,x_{k_c}):x\in X,c\in\mathbf{N},$$
$$\text{对 } 1\leqslant i\leqslant c,k_i\geqslant j,\text{且 } x\in U_{k_1+j}(y)\}.$$

于是 $B=\{g_j(p):p\in M(X),j\in\mathbf{N}\}$ 是 $M(X)$ 的一个基，记

$$G_n=\{g_j(p):p\in M(X),j\geqslant n\},$$

这时 $\{G_n:n\in\mathbf{N}\}$ 是 $M(X)$ 的一个展开.

可以证明，$M(X)$ 是 Moore 空间，当且仅当 X 具有下列性质之一时，$M(X)$ 也具有相应的性质：(1) 可分；(2) 局部可分；(3) CCC；(4) DCCC.（van Douwen, Reed[1991]）

利用上述机器并输入 Galvin 的空间，就可得到下面定理.

1.12.41 定理(CH) 存在 CCC Moore 空间，其乘积不是 CCC 的.

六、Blumberg 问题

设 X 是一个空间. 若对定义于 X 取值于 $[0,1]$ 的任一函数 f，都存在 X 的一个稠子空间 D，使 $f\restriction_D$ 是子空间 D 上的连续函数，则 X 就称为具有 Blumberg 性质.

1922 年 Blumberg 首次证明可分完备度量空间有此性质. 1960 年 Bradford 和 Gaffman 证明度量空间有 Blumberg 性质的充要条件是 X 有 Baire 性质，已知有 Blumberg 性质的拓扑空间一定是 Baire 空间. 但反之不真. 由于紧 T_2 空间是一种性质很强的 Baire 空间，自然会问：紧 T_2 空间是否一定有 Blumberg 性质？这就是 Blumberg 问题.

1.12.42 定理($2^{\omega}=2^{\omega_1}$) 一个 η 集的 Dedekind 完备化 $\tilde{Q}$ 是一个没有 Blumberg 性质的紧 LOTS.（Levy[1974]）

在这里，η 集指的是一个全序集 Q，具有如下性质：$\forall A,B\in$

$[Q]^{\omega}$,若 $A<B$,则存在 $x\in Q$,使得 $A<\{x\}<B$.这样的集是肯定存在的.可参看 Gillman, Jerison[1960]的 13.8.

1.12.43 定理(CH) 若 X 是局部紧的 P 空间,则 X 有 Blumberg 性质.(White[1974])

1.12.44 定理(CH) $\mathbf{R}$ 的密度拓扑空间是没有 Blumberg 性质的 Baire 空间.

记 $St(\mathscr{B}/\vartheta)$是[0,1]区间全体 L 可测集(mod 零测度集)所对应的 Stone 空间.Weiss[1977]证明了下面定理.

1.12.45 定理(CH) $St(\mathscr{B}/\vartheta)$是一个没有 Blumberg 性质的极不连通紧 T_2 空间.

Weiss 还指出存在一个全序集 L,满足如下条件:(1) L 不包含与 ω_2 和反序的 ω_2 序同构的子集.(2) 对任意单调上升的 $A=\{a_n:n\in\mathbf{N}\}$ 和单调下降的 $B=\{b_n:n\in\mathbf{N}\}$,满足 $A<B$,都存在 $x,y,z\in L$,使 $A<\{x\}<\{y\}<\{z\}<B$.(3) $L=\bigcup\{C_\alpha:\alpha\in\omega_2\}$,其中 C_α 是 nwd, $C_\alpha\subset C_{\alpha+1}$,并且 $C_\alpha\neq L$.对于这个集 L,Weiss[1977]证明了:

1.12.46 定理(¬ CH) $(L,<)$的 Dedekind 完备化 $\tilde{L}$ 是一个没有 Blumberg 性质的紧 T_2 LOTS.

综合上述结论,便可以得出

1.12.47 定理(ZFC) $St(\mathscr{B}/\vartheta)\oplus\tilde{L}$ 是一个紧 T_2 空间,它没有 Blumberg 性质.

此外,他还指出:CH⇒ω^* 有 Blumberg 性质. MA + ¬ CH⇒ω^* 有 Blumberg 性质,但 ω^* 没有 Blumberg 性质与¬ CH 是相容的.

七、其他

有关 CH 在其他一些问题上的应用,可以参看下列文献:

Deviln, Shelah[1979](Con(GCH + ∃不可度量的正规 Moore 空间));

Taylor[1981](正规性对分离性);

Roitman[1978],[1980a],[1980b],[1994](S-L 问题);

Rosen[1982], Fleissner[1978a](CH⇒可分、可数仿紧 Moore 空间可度);

Hajanl, Juhasz[1982](Pixley-Roy 空间 CCC 性质);

Kunen[1981](紧 L 空间);

Berner Andrew[1979],[1981],Broverman,Weiss[1981](Parovicenko 空间);

van Mill,Scott[1983](ω^*);

Malyhin[1994](关于 Narrow 空间);

Juhasz,Soukup,Szentmiklosy[1994](基数函数);

Beaudoin Robert[1994](关于连续统);

Gruenhage[1994](关于非退化连通子集是余有限集的空间);

Dow,Hart[1995]($\beta X - X$);

Wingers[1994](箱乘积);

陈怀鹏[1995](乘积空间的 k 性).

第二章　Martin 公理及其应用

引　言

下面两个命题都是熟知的事实.

命题 1　每个局部紧 T_2 空间都是 Baire 空间,即对于任意可数多个开稠密集 $\{G_n : n < \omega\}$,它们的交 $\bigcap_n G_n$ 不空(实际上还是个稠密集).

命题 2　若 $\{E_n : n \in \mathbf{N}\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中测度为零的 Lebesgue 可测集序列,则 $E = \bigcup_n E_n$ 还是一个零测度集.

若承认 CH,则上述命题可以改述为:

(1) 设 X 是局部紧 T_2 空间,$\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 是开稠密集族.若 $|A| < c$,则 $\bigcap\{G_\alpha : \alpha \in A\} \neq \varnothing$.

(2) 设 $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的零测度集族.若 $|A| < c$,则 $E = \bigcup\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ 仍是 Lebesgue 可测的,并且 $m(E) = 0$.

由于 P. Cohen 已经证明 $\neg$ CH 与 ZFC 是相容的,因此,自然会问:上述命题(1)和命题(2)是否能够在一般的情况下成立呢?

有反例说明命题(1)一般是不成立的.

例如,记 ω_1^* 是 LOTS$[0, \omega_1]$,$X = (\omega_1^*)^\omega$ 并赋以乘积拓扑.X 是紧 T_2 空间.对每个 $\alpha < \omega_1$,令

$$M_\alpha = \{x \in X : \mathrm{Sup}\{x(n) : x(n) \neq \omega_1, n < \omega\} \leqslant \alpha\},$$

$$M_{\omega_1} = \{x \in X : x(n) \equiv \omega_1\}.$$

显然有 $X = \bigcup\{M_\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$.

当 $\alpha < \omega_1$ 时,M_α 是闭集.因为若 $y \notin M_\alpha$,则存在 n 使 $y(n) > \alpha$. $V = \{x : x(n) \in (\alpha, \omega_1]\}$ 是 y 的一个邻域,$V \cap M_\alpha = \varnothing$.进而言之,$M_\alpha$ 还是无处稠密的,即 Int $M_\alpha = \varnothing$.实际上,若 $x \in M_\alpha$,则 x 的任一基本邻域都包含有 y,使得对于某个 n 有 $y(n) > \alpha$. M_{ω_1} 是个单点集,所以是

cnwd. 令 $G_\alpha = X - M_\alpha$，则 G_α 是开稠密集，$\bigcap\{G_\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\} = \varnothing$. □

至于命题(2)是否还成立，则尚不清楚，等待我们回答.

实践使人们感觉到，单纯地否定 CH，对研究许多问题总是派不上多大用场. 要真正解决问题，还需要一些肯定的东西. Martin 公理则可以看成是 CH 的一种弱化了的形式(另一种弱化形式——弱连续统假设见第三章)，是在承认 $2^\omega > \omega_1$ 的前提下，CH 的某种替代物.

从历史上看，Martin 公理是 Martin 和 Solovay 在 1970 年的一篇文章中提出来的，其原始背景倒并不是试图回答拓扑学方面的问题. 然而后来的发展表明，这个公理却如 CH 一样在拓扑学中获得了广泛的应用，成为拓扑学方面应用得最富成果的集论假设之一.

§1 Martin 公理的形式及一些简单推论

Martin 公理可以有多种等价的叙述形式，如 Boole 代数形式、半序形式、拓扑形式等，其中最便于应用的是半序形式. 为了以这种形式叙述 Martin 公理，我们先给出一些必要的定义.

2.1.1 定义 $(\boldsymbol{P}, \leqslant)$称为一个半序集(简记为 PO 或 Poset)，如果 $\leqslant \subset \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P}$是一个半序，即满足：(1) $\forall p \in \boldsymbol{P}, p \leqslant p$；(2) $\forall p, q \in \boldsymbol{P}$, $(p \leqslant q) \wedge (q \leqslant p) \Rightarrow p = q$；(3) $\forall p, q, r \in \boldsymbol{P}, (p \leqslant q) \wedge (q \leqslant r) \Rightarrow p \leqslant r$.

$D \subset \boldsymbol{P}$称为稠密的，如果下列命题成立：$\forall x \in \boldsymbol{P}, \exists d \in D, d \leqslant x$.

$G \subset \boldsymbol{P}$称为一个 filter(滤子)，如果 G 满足下列两个条件：(1) $p, q \in G \Rightarrow \exists r \in G, (r \leqslant p) \wedge (r \leqslant q)$；(2) $p \in G \Rightarrow \forall q, q \geqslant p \Rightarrow q \in G$.

$p, q \in \boldsymbol{P}$称为相容的(Compatible)，如果存在 $r \in \boldsymbol{P}$，使$(r \leqslant p) \wedge (r \leqslant q)$，否则称为不相容的，并记作 $p \perp q$.

$C \subset \boldsymbol{P}$称为一个链，如果$\forall p, q \in C, (p \leqslant q) \vee (q \leqslant p)$.

$A \subset \boldsymbol{P}$称为反链，如果$\forall p, q \in A$，有 $p \perp q$. □

2.1.2 定义 $(\boldsymbol{P}, \leqslant)$称为 CCC PO(满足可数链条件的半序集)，如果$\boldsymbol{P}$的每个反链 A 都是可数集.

设 $\mathscr{D}$是 $\boldsymbol{P}$ 中稠密集组成的一个集族，G 是一个 filter，如果 $\forall D \in \mathscr{D}, G \cap D \neq \varnothing$，就称 G 是 $\mathscr{D}$的一个 generic filter. □

有了这些准备,我们就可以叙述 Martin 公理的半序形式了.

设 κ 是满足 $\omega < \kappa < 2^{\omega}$ 的一个无限基数.

MA κ 是指如下的命题:

设$(P, \leqslant)$是一个 CCC PO,$\mathscr{D}$是一族稠密集.若$|\mathscr{D}| = \kappa$,则存在 $\mathscr{D}$-generic filter.

MA 是指:$\forall \omega < \kappa < 2^{\omega}$,MA κ 成立.

上述命题统称 Martin 公理(MA 是 Martin's Axiom 的缩写).

在这里,我们说明一下为什么要作出有关势的限制和提出 CCC 的要求.

(1) 当 $\kappa \leqslant \omega$ 时,上述命题即使不要 CCC,也是 ZFC 中的一个定理,因此毋需作为一条公理提出,证明如下:设 $\mathscr{D} = \{D_n : n < \omega\}$是$P$的稠密集序列.由 $D_0 \neq \varnothing$,可取 $d_0 \in D_0$. D_1 稠密,存在 $d_1 \in D_1$,使 $d_1 \leqslant d_0$.于是可以选出下降序列 $d_0, d_1, \cdots, d_n, \cdots$,其中 $d_i \in D_i$.令 $G = \{p : \exists i$ 使 $d_i \leqslant p\}$.则 G 就是一个 $\mathscr{D}$-generic filter.

(2) 当 $\kappa = 2^{\omega}$ 时,从 ZFC 中可以找出使 MA 2^{ω} 不成立的反例.设

$$P = \{f \subset \omega \times 2 : f \text{是函数}, |f| < \omega\}.$$

(今后我们记这个集为 $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$.)规定 $f \leqslant g$ 当且仅当 $g \subset f$,即函数 f 是 g 的一个扩张.对任意 $h \in {}^{\omega}2 = \{h \subset \omega \times 2 : h \text{ 是函数}, \mathrm{dom}\, h = \omega\}$.令

$$E_h = \{f \in P : \exists n \in \mathrm{dom}\, f, \text{使 } f(n) \neq h(n)\},$$

$$D_n = \{f \in P : n \in \mathrm{dom}\, f\},$$

则容易验证它们都是P中的稠密集.由于$|{}^{\omega}2| = 2^{\omega}$,这样的稠密集共有 2^{ω} 个.假如 MA 2^{ω} 成立,则存在一个 generic filter G.令 $f = \bigcup G$.

① $f \subset \omega \times 2$ 是一个函数.设$\langle n, \varepsilon_1 \rangle \in g_1 \in G$,$\langle n, \varepsilon_2 \rangle \in g_2 \in G$.因为 G 是 filter,存在 $g \in G$,使 $g \leqslant g_1, g \leqslant g_2$,即 $g_1 \subset g, g_2 \subset g$.于是$\langle n, \varepsilon_1 \rangle, \langle n, \varepsilon_2 \rangle \in g$.但 $g \in P$是一个函数,所以 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$,$f(n)$是单值的.

② 因为$\forall n, G \cap D_n \neq \varnothing$,所以 $\mathrm{dom}\, f = \omega$,$f \in {}^{\omega}2$.

③ $G \cap E_f \neq \varnothing$.设 $g \in G \cap E_f$.则存在 n,使 $f(n) \neq g(n)$.但 $g \subset f \Rightarrow g(n) = f(n)$,矛盾,所以 MA 2^{ω} 不能成立.

(3) 若取消对P的 CCC 条件,则在 ZFC 中存在反例.取

$$P = \{p \subset \omega \times \omega_1 : p \text{ 是函数}, |p| < \omega\}$$
$$= \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1).$$

规定 $p \leqslant q$ 当且仅当 $q \subset p$. 对每个 $\alpha < \omega_1$, 令 $D_\alpha = \{p \in P : \alpha \in \mathrm{ran}\ p\}$. 容易验证 D_α 是稠密集, 令 $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. 假设存在 $\mathscr{D}$-generic filter G. 令 $f = \bigcup G$, 则 $f \in {}^\omega\omega_1$, 由于 $\forall \alpha$, $G \cap D_\alpha \neq \varnothing$, 因此有 $\mathrm{ran}\ f = \omega_1$. 这显然是不可能的, 因为 $|\mathrm{ran}\ f| \leqslant |\mathrm{dom}\ f|$.

注: $\forall \alpha$, 记 $p_\alpha = \{\langle 0, \alpha\rangle\}$, 则 $A = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是 P 的一个反链, 所以 $(P, \leqslant)$ 不是 CCC PO. □

由定义看出, 若 MA κ 成立而 $\lambda < \kappa$, 则 MA λ 也成立. 从逻辑的角度看, 显然有 ZFC + CH $\rightarrow$ ZFC + MA. 因为已证明 Con(ZFC + CH), 所以也就有 Con(ZFC + MA), 即 MA 与 ZFC 是相容的. 另一方面, 即使已知 $\neg$ CH 与 ZFC 相容, 也不能直接得出 MA + $\neg$ CH 相容的结论. MA 与 $\neg$ CH 相容的结论是 1971 年 Solovay 与 Tennenbaum 通过迭代 forcing 的方法证明的. 有关 MA 的进一步介绍可以参看 Kunen[1980]第 8 章, 周浩旋[1979a]和 Weiss[1984].

下面我们介绍 Martin 公理的几种等价说法, 为此先介绍几个拓扑概念.

2.1.3 定义 (1) 拓扑空间 (X, τ) 称为 κ-Baire 的, 如果 X 中任何一族势 $< \kappa$ 的开稠密集 $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$, 其交 $\bigcap \{G_\alpha : \alpha \in A\} \neq \varnothing$.

ω_1-Baire 性就是通常的 Baire 性, c-Baire 性也称为强 Baire 性.

(2) X 的一个滤子基 $\mathscr{F}$ 称为正则的, 如果

$$\forall F_1, F_2 \in \mathscr{F}, \exists F \in \mathscr{F}, \bar{F} \subset (F_1 \cap F_2)^\circ.$$

正则空间 (X, τ) 称为 κ-π 完备的, 若 X 有一族 π 基 $\{\mathscr{B}_\alpha : \alpha \in A\}$, $|A| < \kappa$, 使得对任一正则滤子基 $\mathscr{F} \subset \bigcup \{\mathscr{B}_\alpha : \alpha \in A\}$, 若对所有的 $\alpha \in A$ 有 $\mathscr{F} \cap \mathscr{B}_\alpha \neq \varnothing$, 则 $\bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$. 2^ω-π 完备简称为 π 完备. □

显然任一局部紧 T_2 空间是 π 完备的, 这只需取 $A = \{0\}$, $\mathscr{B}_0 = \{G \in \tau : \bar{G}$ 是紧集$\}$ 即可看出.

2.1.4 定理 对于满足 $\omega < \kappa < 2^\omega$ 的 κ, 下述命题是等价的:

(1) MA κ.

(2) 设$(\boldsymbol{P},\leqslant)$是一个势 $=\kappa$ 的 CCC PO,$\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha<\kappa\}$是稠密集族,则存在 $\mathscr{D}$-generic filter G.

(3) 设$(\boldsymbol{B},\leqslant)$是一个 CCC 完备 Boole 代数,$\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha<\kappa\}$是稠密集族,则存在 $\mathscr{D}$-generic filter G.

(4) 任何一个紧 T_2 CCC 空间是 κ^+-Baire 的.

(5) 任何一个局部紧 T_2 CCC 空间是 κ^+-Baire 的.

(6) 任何一个正则 CCC,κ^+-π 完备空间是 κ^+-Baire 的.

证明 我们将按(1)⇒(6)⇒(5)⇒(4)⇒(3)⇒(2)⇒(1)的路线予以证明.注意(6)⇒(5)⇒(4)是显然的.

(1)⇒(6):设(X,τ)是一个满足 CCC 的正则 κ^+-π 完备空间,$\{\mathscr{B}_\alpha:\alpha<\kappa\}$是一族 π 基,$\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{B}_\alpha:\alpha<\kappa\}$.设 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$.定义 $B_1\leqslant B_2$ 当且仅当 $\overline{B}_1\subset B_2$,则$(\mathscr{B},\leqslant)$是一个 PO.易见 $B_1\perp B_2$ 当且仅当 $B_1\cap B_2=\varnothing$.所以$(\mathscr{B},\leqslant)$是 CCC PO.

设$\{A_\alpha:\alpha<\kappa\}$是 X 中一族 cnwd 集.对任何$(\alpha,\beta)\in\kappa\times\kappa$,令 $D_{\alpha\beta}=\{B:B\in\mathscr{B}_\alpha,B\cap A_\beta=\varnothing\}$.对每个 $B\in\mathscr{B}$,$B-A_\beta$ 是不空的开集,由 X 的正则性及 $\mathscr{B}_\alpha$ 是π 基可知,存在 $B_\alpha\in\mathscr{B}_\alpha$,使 $\overline{B}_\alpha\subset B-A_\beta$.于是 $B\in D_{\alpha\beta}$并且$B_\alpha\leqslant B$.所以 $D_{\alpha\beta}$是稠密的.由命题(1),存在滤子 G 使得对任何α,β,$G\cap D_{\alpha\beta}\neq\varnothing$.从定义可知 G 是一个正则滤子基.任取 $B_{\alpha\beta}\in G\cap D_{\alpha\beta}$,$\{B_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\kappa\}\subset G$ 是势为κ 的集,根据 Löwenheim-Skolem-Tarski 定理(请参看本定理后面的注),存在一个势为 κ 的正则滤子基 $\mathscr{F}$,使$\{B_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\kappa\}\subset\mathscr{F}\subset G$.由 X 的κ^+-π 完备性,$\bigcap\mathscr{F}\neq\varnothing$.注意$\bigcap\mathscr{F}\subset\bigcap\{B_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\kappa\}\subset X-\bigcup\{A_\beta:\beta<\kappa\}$,于是$\bigcup\{A_\beta:\beta<\kappa\}\neq X$.所以 X 是κ^+-Baire 的.

(4)⇒(3):设$(\boldsymbol{B},\leqslant)$是一个 CCC 完备 Boole 代数,其对应的 Stone 空间 $S(\boldsymbol{B})$有形如$\{a^*:a\in\boldsymbol{B}\}$的基.不难验证 a,b 相容的充要条件是 $a^*\cap b^*\neq\varnothing$.而 $a\perp b$ 当且仅当$a^*\cap b^*=\varnothing$.$S(\boldsymbol{B})$是一个 0 维紧 T_2 空间.设 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$(\boldsymbol{B},\leqslant)$的一族稠密集.记 $D_\alpha^*=\bigcup\{r^*:r\in D_\alpha\}$.则 $\mathscr{D}^*=\{D_\alpha^*:\alpha<\kappa\}$是 $S(\boldsymbol{B})$的一族开稠密集.由(4),存在 $p\in\bigcap\mathscr{D}^*$,p 是$\boldsymbol{B}$的一个 uft,并且对每个 α,存在 $r_\alpha\in D_\alpha$,使 $p\in r_\alpha^*$,即 $r_\alpha\in$

p. 所以 $p\cap D_\alpha\neq\varnothing$. 因此滤子 p 就是一个 $\mathscr{D}$-generic filter.

(3)⇒(2): 设$(\boldsymbol{B},\leqslant)$是一个 CCC PO. 对每个 $p\in\boldsymbol{P}$, 定义 $N(p)=\{q\in\boldsymbol{P}:q\leqslant p\}$. 以$\{N(p):p\in\boldsymbol{P}\}$作为基可以生成$\boldsymbol{P}$的一个拓扑 τ(一般来说, τ 是 T_0 但不是 T_1 的). 记$\boldsymbol{R}$为由$(\boldsymbol{P},\tau)$中的正则开集构成的完备 Boole 代数. 注意 p,q 在$\boldsymbol{P}$中相容当且仅当$N(p)\cap N(q)\neq\varnothing$. 因此$(\boldsymbol{P},\tau)$是 CCC 空间. 再者, 对于 $A,B\in\boldsymbol{R}$, $A\perp B$ 当且仅当$A\cap B=\varnothing$. 这说明$(\boldsymbol{R},\leqslant)$也是 CCC Boole 代数. 映射 $\varphi(p)=\operatorname{Int}\operatorname{Cl}_\tau(N(p))$是$\boldsymbol{P}$到$\boldsymbol{R}$的一个保序映射, 并且 $p\perp q\Rightarrow\varphi(p)\perp\varphi(q)$.

假设 $D\subset\boldsymbol{P}$是一个稠密集, 这时对每个 $A\in\boldsymbol{R}-\{0\}$, 存在 $p\in\boldsymbol{P}$, 使 $N(p)\subset A$. 又由稠密性, 存在 $r\in D$, 使 $r\leqslant p$. 于是 $N(r)\subset N(p)$, $\varphi(r)\leqslant\varphi(p)=\operatorname{Int}\operatorname{Cl}N(p)\subset\operatorname{Int}\operatorname{Cl}A=A$. 这说明 $\varphi(D)$也是$\boldsymbol{R}$的稠密集.

现在设$|\boldsymbol{P}|=\kappa$, $\{D_\alpha:\alpha<\kappa\}$是稠密集族. 对任意的 $p,q\in\boldsymbol{P}$, 定义

$$D_{pq}=\{r\in\boldsymbol{P}:[(r\leqslant p)\wedge(r\leqslant q)]\vee(r\perp p)\vee(r\perp q)\}.$$

D_{pq}是$\boldsymbol{P}$的稠密集, 这是因为对每个 $r_0\in\boldsymbol{P}$, 若 $r_0\notin D_{pq}$, 则由 $r_0\perp p$ 不成立, 存在 $r_1\in\boldsymbol{P}$, 使 $r_1\leqslant p$, $r_1\leqslant r_0$. 若 $r_1\notin D_{pq}$, 则存在 $r_2\in\boldsymbol{P}$, 使 $r_2\leqslant r_1$, $r_2\leqslant q$. 这时 $r_2\leqslant p$, $r_2\leqslant q$ 同时成立. 依定义 $r_2\in D_{pq}$, 而 $r_2\leqslant r_0$.

记 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha<\kappa\}\cup\{D_{pq}:p,q\in\boldsymbol{P}\}$, 则$|\mathscr{D}|=\kappa$. 记 $\varphi(\mathscr{D})=\{\varphi(D):D\in\mathscr{D}\}$, 则$|\varphi(\mathscr{D})|\leqslant\kappa$. 由(3), $\boldsymbol{R}$有一个 $\varphi(\mathscr{D})$-generic filter G. 记 $H=\varphi^{-1}(G)$. 显然对所有 α, $H\cap D_\alpha\neq\varnothing$. 余下只需证明 H 是$\boldsymbol{P}$的一个滤子. 设 $p,q\in H$, 取 $r\in H\cap D_{pq}$. 因为 G 是$\boldsymbol{R}$的一个滤子, $H=\varphi^{-1}(G)$的元是两两相容的, 所以$\neg(r\perp p)$与$\neg(r\perp q)$同时成立. 但 $r\in D_{pq}$, 故有 $r\leqslant p$, $r\leqslant q$ 同时成立. 于是 H 是$\boldsymbol{P}$的一个滤子.

(2)⇒(1): 设$(\boldsymbol{P},\leqslant)$是一个 CCC PO, $\mathscr{D}$是一个稠密集族, $|\mathscr{D}|=\kappa$. 对每个 $D\in\mathscr{D}$, 定义 $f_D:\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{P}$如下: $f_D(p)\in D$, 并且 $f_D(p)\leqslant p$. (实际上 f_D 就是集族$\{\{r\in D:r\leqslant p\}:p\in\boldsymbol{P}\}$的一个选择函数.) 又定义$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{P}$到$\boldsymbol{P}$的一个函数 g, 使得若 p,q 相容, 则 $g(p,q)$同时$\leqslant p,q$. 再次应用 Löwenheim-Skolem-Tarski 定理, 存在势为 κ 的子集 $\boldsymbol{Q}\subseteq\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{Q}$ 对$\{f_D:D\in\mathscr{D}\}\cup\{g\}$是封闭的. $(\boldsymbol{Q},\leqslant)$显然还是 CCC PO. 根据函数

f_D 的定义及 Q 对 f_D 的封闭性,可知 $Q\cap D$ 是 Q 中的稠密集.另外,若 $q_1,q_2\in Q$,q_1,q_2 在P中是相容的,则 $g(q_1,q_2)$有意义,并且 $g(q_1,q_2)\in Q$,$g(q_1,q_2)\leqslant q_1,q_2$.因此 q_1,q_2 在 Q 中也是相容的.应用命题(2)于$(Q,\leqslant)$,得到一个滤子 $G\subset Q$,使得对任何 $D\in\mathscr{D}$, $G\cap(Q\cap D)\neq\varnothing$.设 H 是由 $G\subset P$生成的P中的滤子,即 $H=\{p\in P:\exists q\in G,q\leqslant p\}$,则对任何 $D\in\mathscr{D}$,有 $D\cap H\neq\varnothing$.于是命题(1)成立. □

注:设 A 是不空集.所谓 A 上的一个 n 元函数指的是一个A^n 到A 的函数(当 $n=0$ 时,指的就是 A 中某个元素).称 $B\subset A$ 关于n 元函数 f是封闭的,如果$f(B^n)\subset B$(当 $n=0$ 时指 $f\in B$).如果 $\mathscr{S}$是一族有限元函数,$B\subset A$,$C\subset A$ 称为B 在 $\mathscr{S}$下的闭包,如果 C 包含B,并且它是对所有 $f\in\mathscr{S}$封闭的最小的集.

Löwenheim-Skolem-Tarski 定理的一般形式及证明如下.

定理 设 κ 是无限基数,$B\subset A$,$|B|\leqslant\kappa$,又设 $\mathscr{S}$是 A 上一族有限元函数,$|\mathscr{S}|\leqslant\kappa$,则 B 对 $\mathscr{S}$的闭包存在,并且它的势$\leqslant\kappa$.

证明 设 $D\subset A$,$f\in\mathscr{S}$. 如果f是0元函数,记$f*D=\{f\}$,如果f是n 元函数,$n>0$. 记 $f*D=f(D^n)$,注意$|f(D^n)|\leqslant|D|$,所以若 $|D|\leqslant\kappa$,则有 $|f*D|\leqslant\kappa$.现在取 $C_0=B$, $C_{n+1}=C_n\cup\{f*D_n:f\in\mathscr{S}\}$,则对任何 n,$|C_n|\leqslant\kappa$.令 $C=\bigcup\{C_n:n<\omega\}$,则$|C|\leqslant\kappa$.注意 C 在 $\mathscr{S}$之下是封闭的,$B\subset C$,所以 C 为所求. □

上述 LST 定理在模型论里的表现形式是模型论中两个基础性定理中的一个(另一个是紧致性定理).在定理 2.1.4 的(1)⇒(6)的证明中,$\mathscr{S}$仅仅包含一个二元函数 g. $\mathrm{dom}\ g=G\times G$,$g$ 是$\{\{r\in G:(r\leqslant p)\wedge(r\leqslant g)\}:\langle p,q\rangle\in G\times G\}$的某个选择函数.在(2)⇒(1)的证明中,$\mathscr{S}$由 g 和所有的 $f_D(D\in\mathscr{D})$组成.

下面是定理 2.1.4 的一个有趣的拓扑学推论.

2.1.5 定理(MA ω_1) 局部紧 T_2,遗传 Lindelöf 空间必定是可分的(从而是遗传可分的).换言之,MA ω_1⇒不存在局部紧的 L 空间.

证明 设 X 是一个局部紧 T_2 的遗传 Lindelöf 空间.首先指出这是一个全正规的局部紧空间,从而它是第一可数的.假若 X 不是可分的,则存在一个 ω_1 序列 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset X$,使得对每个 α,$x_\alpha\in\{x_\xi:\xi<$

$\alpha\}^-$. 记 $Y_\alpha=\{x_\xi:\xi<\alpha\}^-$, $Y=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}^-$. X 的闭子空间 Y 仍是局部紧,遗传 Lindelöf 第一可数空间. $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 Y 的稠密集,所以 $Y=\bigcup\{Y_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 记 $U_\alpha=\mathrm{Int}_Y Y_\alpha$. $\{U_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是单调上升的开集序列. 由 Y 的 Lindelöf 性,存在 α,使得当 $\xi\geqslant\alpha$ 时 $U_\xi=U_\alpha$. 于是 $Y_\xi-U_\alpha=Y_\xi-U_\xi$ 是闭的无处稠密集. 由 $Y-U_\alpha=\bigcup\{Y_\xi-U_\alpha:\xi\geqslant\alpha\}$,得出 $Y-U_\alpha$ 是 ω_1 个 cnwd 集之并. 注意 $Y-U_\alpha$ 是局部紧 T_2, CCC(由遗传 Lindelöf 性得出)空间. 这就与定理 2.1.4 的(5)矛盾,所以 X 是可分的. □

2.1.6 定义 设$(\boldsymbol{P},\leqslant)$是一个 PO.

(1) $Q\subset\boldsymbol{P}$称为定心的(centred),或称 Q 有 fip,如果对任意有限个 $q_1,\cdots,q_n\in Q$,存在 $p\in\boldsymbol{P}$,使得 $p\leqslant q_i$ 对所有 $i=1,\cdots,n$ 成立. Q 称为 σ-定心的,如果 $Q=\bigcup_n Q_n$,其中每个 Q_n 是定心的.

(2) $Q\subset\boldsymbol{P}$ 称为交联的(linked),如果对任意 $q_1,q_2\in Q$,存在 $p\in\boldsymbol{P}$,使得 $p\leqslant q_1,p\leqslant q_2$,即 q_1,q_2 是相容的.

(3) $\boldsymbol{P}$称为有 precalibre ω_1,如果$\boldsymbol{P}$的任意不可数子集 Q 都包含有一个不可数定心子集.

(4) $\boldsymbol{P}$称为有性质K,如果$\boldsymbol{P}$的任意不可数子集 Q 都包含有一个不可数交联子集. □

显然,定心子集一定是交联的. $\boldsymbol{P}$有 Precalibre ω_1 时也必有性质 K, $\boldsymbol{P}$有性质K时也必定是 CCC 的.

$\boldsymbol{P}$有 Precalibre ω_1 有时也称$\boldsymbol{P}$有性质$\boldsymbol{H}$. 性质 K 有时也称 Knaster 条件.

2.1.7 定义 设$(\boldsymbol{P},\leqslant)$,$(\boldsymbol{Q},\leqslant)$是两个 PO,它们的乘积半序$(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q},\leqslant)$定义为

$$\langle p_1,q_1\rangle\leqslant\langle p_2,q_2\rangle\Leftrightarrow\langle p_1\leqslant p_2\rangle\wedge\langle q_1\leqslant q_2\rangle. \quad □$$

2.1.8 定义 拓扑空间(X,τ)称为有 Precalibre ω_1,如果对任何一个不可数开集族 $\mathscr{U}$,都存在子族$\{U_\alpha:\alpha\in A\}\subset\mathscr{U}$,它有 fip, $|A|>\omega$. □

2.1.9 定理(MA ω_1) 任何 CCC 空间 X 都有 Precalibre ω_1.

证明 不失普遍性,可设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 对 $\alpha<\omega_1$,记 $V_\alpha=\bigcup\{U_\beta:\beta>\alpha\}$. 则$\{V_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是单调下降开集序列, $\{V_\xi-\overline{V_{\xi+1}}:\xi<$

$\omega_1\}$是互不相交的开集.由 CCC,存在 $\alpha<\omega_1$,使得所有 $\beta\geqslant\alpha$, $V_\beta-V_{\beta+1}^-=\varnothing$,即 $V_\beta\subset V_{\beta+1}^-$,从而 $V_\beta^-=V_{\beta+1}^-$,于是 $V_\beta^-\equiv V_\alpha^-$.令

$$P=\{p\in\tau-\{\varnothing\}:p\subset V_\alpha\}.$$

规定 $p\leqslant q\Leftrightarrow p\subset q$.由 X 的 CCC 性,$(P,\leqslant)$是 CCC PO.对每个 $\beta>\alpha$,令

$$D_\beta=\{p\in P:\exists\,\gamma>\beta,\text{使 }p\subset U_\gamma\}.$$

设 $q\in P$, $q\subset V_\alpha\subset V_\beta^-=(\bigcup\{U_\xi:\xi>\beta\})^-$,这时存在 $\gamma>\beta$,使 $q\cap U_\gamma\neq\varnothing$.令 $p=q\cap U_\gamma$,则 $p\leqslant q$ 并且 $p\in D_\beta$.所以 D_β 是稠密集.设 $\mathscr{D}=\{D_\beta:\beta>\alpha\}$, G 是 $\mathscr{D}$-generic fiter.对任意 $\beta>\alpha$, $G\cap D_\beta\neq\varnothing$.于是存在 $p_\beta\in G$,使 $p_\beta\in D_\beta$,即存在 $\gamma=\gamma(\beta)$,使 $p_\beta\subset U_{\gamma(\beta)}$.于是可以归纳地作出 $A\subset\omega_1$, $|A|=\omega_1$,使得 $\gamma,\delta\in A$, $\gamma\neq\delta\Rightarrow U_\gamma\neq U_\delta$.因为 G 是一个滤子,它是定心的,所以$\{U_\gamma:\gamma\in A\}$有 fip. □

利用这个拓扑学结论,可以证明关于半序形式的类似定理.

2.1.10 定理(MA ω_1) 任何一个 CCC PO$(P,\leqslant)$都有 precalibre ω_1.

证明 考虑定理 2.1.4 证明中(3)⇒(2)那一部分引出的拓扑空间(P,τ),这是一个 CCC 空间.设$\{p_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset P$,应用定理 2.1.9 于开集族$\{N(p_\alpha):\alpha<\omega_1\}$,可得出 $A\in[\omega_1]^{\omega_1}$,使$\{N(p_\alpha):\alpha\in A\}$有 fip.于是$\{p_\alpha:\alpha\in A\}$就是定心的. □

2.1.11 引理 设$(P,\leqslant)$,$(Q,\leqslant)$是两个 CCC PO.

(1) 若P,Q 有 precalibre ω_1,则$(P\times Q,\leqslant)$有 precalibre ω_1.

(2) 若P,Q 有性质K,则$(P\times Q,\leqslant)$有性质 K.

(3) 若P有性质K,Q 为 CCC,则$(P\times Q,\leqslant)$是 CCC.

证明 我们只证明性质(3).设$\{\langle p_\alpha,q_\alpha\rangle:\alpha\in A\}$, $|A|>\omega$, P有性质K,则存在 $B\in[A]^{\omega_1}$,使$\{p_\alpha:\alpha\in B\}$是交联的,Q 是 CCC,故存在 α, $\beta\in B$,使 q_α, q_β 相容.于是$\langle p_\alpha,q_\alpha\rangle$,$\langle p_\beta,q_\beta\rangle$是相容的.这就证明了$P\times Q$ 是 CCC. □

2.1.12 定理(MA ω_1) 任意两个 CCC PO 的乘积还是 CCC PO.

证明 由 2.1.10,2.1.11 及 2.1.6 后面的说明直接得出. □

2.1.13 定理(MA ω_1) 任意两个 CCC 空间的乘积还是 CCC 空间(Kunen).

证明 设(X,τ),(Y,σ)是 CCC 空间. $U,V\in\tau$(或 σ)时,规定 $U\leqslant V$ 当且仅当 $U\subset V$. 则$(\tau,\leqslant)$,$(\sigma,\leqslant)$都是 CCC PO. 由 2.1.12$(\tau\times\sigma,\leqslant)$是 CCC PO. 因为 $\tau\times\sigma$ 构成了乘积空间 $X\times Y$ 的一个基,所以 $X\times Y$ 是 CCC 空间. □

在第一章我们曾证明 CH 蕴涵存在两个 CCC 空间其乘积不是 CCC 的. 这样我们就知道了,"两个 CCC 空间的乘积还是 CCC 空间"这个命题是独立于 ZFC 系统的.

定理 2.1.10 的结论还可以进一步地加强为如下的定理.

2.1.14 定理(MA κ) 每个势为 κ 的 CCC PO$(\boldsymbol{P},\leqslant)$都是 σ-定心的.

证明 设 $\boldsymbol{Q}=\{f: f$ 是函数, $\operatorname{dom} f=\{0,1,\cdots,n-1\}$,其中 $n\in\mathbf{N}$. 同时 $\forall\, i\in\operatorname{dom} f, f(i)$是$\boldsymbol{P}$的一个有限定心子集$\}$. 规定 $f\leqslant g$ 当且仅当 $\operatorname{dom} g\subset\operatorname{dom} f$,并且 $\forall\, i\in\operatorname{dom} g, g(i)\subset f(i)$.

(1) $(\boldsymbol{Q},\leqslant)$是一个 CCC PO.

设$\{f_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset\boldsymbol{Q}$. 对每个 α 和 $i\in\operatorname{dom} f_\alpha$, $f_\alpha(i)$是有限定心集,故存在一个下界 $p_{\alpha_i}\in\boldsymbol{P}$. 注意$\{\operatorname{dom} f: f\in\boldsymbol{Q}\}$是可数集,于是存在 $n\in\mathbf{N}$ 和不可数集 $\Gamma_0\subset\omega_1$,使得对所有 $\alpha\in\Gamma_0$, $\operatorname{dom} f_\alpha=\{0,1,\cdots,n-1\}$. 由定理2.1.10,存在 $\Gamma_1\in[\Gamma_0]^{\omega_1}$,使$\{p_{\alpha_0}:\alpha\in\Gamma_1\}$是交联的. 依此类推,可得到 $\Gamma_n\in[\Gamma_{n-1}]^{\omega_1}$,使得$\{p_{\alpha_n}:\alpha\in\Gamma_n\}$是交联的. 现在对任何 $\alpha,\beta\in\Gamma_n$,由于$\{p_{\alpha_i}:\alpha\in\Gamma_n\}$ $(i<n)$都是交联的,存在 $q_i\in\boldsymbol{P}$,使 q_i 是$f_\alpha(i)$与 $f_\beta(i)$的公共下界. 这就说明 $f_\alpha(i)\cup f_\beta(i)$是定心的. 定义 $g(i)=f_\alpha(i)\cup f_\beta(i)$, $i<n$,则 $g\leqslant f_\alpha$, $g\leqslant f_\beta$,即 f_α 与 f_β 是相容的.

(2) 对每个 $p\in\boldsymbol{P}$,设

$$D_p=\{f\in\boldsymbol{Q}:\exists\, i\in\operatorname{dom} f, \text{使 } p\in f(i)\}.$$

对任意 $h\in\boldsymbol{Q}$,记 $n=|\operatorname{dom} h|+1$. 令 $f=h\cup\{\langle n,p\rangle\}$,则 $f\in D_p$,而 $f\leqslant h$,所以 D_p 是稠密集.

(3) 记 $\mathscr{D}=\{D_p: p\in\boldsymbol{P}\}$. 由 $|\boldsymbol{P}|=\kappa$ 及 MA κ,存在 $\mathscr{D}$-generic filter

$G \subset \boldsymbol{Q}$.对每个 $i < \omega$.定义

$$g(i) = \{p \in \boldsymbol{P}: \exists f \in G, 使\ i \in \operatorname{dom} f, p \in f(i)\}.$$

设 $p_1, \cdots, p_n \in g(i)$,又设 $f_j \in G$ 是使 $p_j \in f_j(i)$ 的函数,由于 G 是一个滤子,存在有 $f \in G$,使 $f \leqslant$ 所有的 f_j.于是 $f_1(i) \cup \cdots \cup f_n(i) \subset f(i)$.$f(i)$ 是定心的,这时 $f(i)$ 的下界也就是 $p_1, \cdots, p_n$ 的一个下界.这就证明了 $g(i)$ 是定心的.

(4) 对任意 $p \in \boldsymbol{P}$,由 $G \cap D_p \neq \varnothing$,存在 $f_p \in D_p \cap G$.于是存在 $i \in \operatorname{dom} f_p$,使 $p \in f_p(i)$.依定义,有 $p \in g(i)$.这就证明了 $\boldsymbol{P} = \bigcup \{g(i): i < \omega\}$.即 $\boldsymbol{P}$ 是 σ-定心的. □

由上述定理可以推出一个拓扑学命题.

2.1.15 定理(MA κ) 设 X 是一个局部紧 T_2,CCC 空间.若 $\pi(X) = \kappa$,则 X 是可分的.(Juhasz)

证明 因为局部紧 T_2 空间的可分性等价于它的任何一个紧化的可分性,所以不妨就紧 T_2 情况来论证.依假设,可以取一个势为 κ 的 π 基 $\boldsymbol{P}$,使得对任一开集 $G \neq \varnothing$,存在 $p \in \boldsymbol{P}$,使 $\bar{p} \subset G$,规定 $p \leqslant q$ 当且仅当 $p \subset q$.这时 $p \perp q$ 等价于 $p \cap q = \varnothing$.因此 $(\boldsymbol{P}, \leqslant)$ 是一个 CCC PO.由定理 2.1.14,$\boldsymbol{P} = \bigcup_n \boldsymbol{P}_n$,其中每个 $\boldsymbol{P}_n$ 是定心的.于是 $\bigcap \{\bar{p}: p \in \boldsymbol{P}_n\} \neq \varnothing$.任取其中一个点 x_n,则 $D = \{x_n: n < \omega\}$ 就是 X 的一个可数稠密集. □

下面是由 Wage 作出的一个应用 Martin 公理的较为复杂的例子.

2.1.16 定理(MA + ┐CH) 设 ρ 和 τ 是 X 上的两个拓扑,满足下列条件:(1) $\rho \subset \tau$,(2) (X, ρ) 是 T_2 的并且 $w(X, \rho) = \omega$,(3) 存在 τ 的闭邻域基 $\mathscr{U}$,使得每个 $V \in \mathscr{U}$,V 都是 (X, ρ) 中的紧集.这时对任何 $H, K \in [X]^{<c}$,若 $H \cap \mathrm{Cl}_\tau K = K \cap \mathrm{Cl}_\tau H = \varnothing$,则 H, K 是 τ 分离的.

证明 取 (X, ρ) 的一个可数基 $\mathscr{B}$,不妨设 $\mathscr{B}$ 对有限并运算是封闭的.设

$$\boldsymbol{P} = \{\langle U, V\rangle \in \mathscr{U} \times \mathscr{U}: U \cap (\mathrm{Cl}_\tau K \cup V) = V \cap (\mathrm{Cl}_\tau H \cup U) = \varnothing\}.$$

规定 $\langle U_1, V_1\rangle \leqslant \langle U_2, V_2\rangle$,当且仅当 $U_2 \subset U_1$, $V_2 \subset V_1$.容易验证,若 $\langle U_1, V_1\rangle$ 与 $\langle U_2, V_2\rangle$ 相容,则 $(U_1 \cup U_2) \cap (V_1 \cup V_2) = \varnothing$.注意,若 $\langle U,$

$V\rangle\in \boldsymbol{P}$,则 $U\cap V=\varnothing$.由于 U,V 是(X,ρ)中的紧集,因此存在 $B\in\mathscr{B}$,使 $U\subset B\subset X-V$.对每个 $B\in\mathscr{B}$,记

$$\boldsymbol{P}_B=\{\langle U,V\rangle:U\subset B\subset X-V\},$$

则$\boldsymbol{P}_B$ 是定心的. $\boldsymbol{P}=\bigcup\{\boldsymbol{P}_B:B\in\mathscr{B}\}$. 于是$(\boldsymbol{P},\leqslant)$是 σ-定心的,从而是 CCC PO. 对任一 $x\in H\cup K$,定义

$$D_x=\{\langle U,V\rangle:x\in \mathrm{Int}_\tau U\cup \mathrm{Int}_\tau V\}.$$

对任意给定的$\langle U_0,V_0\rangle\in \boldsymbol{P}$,设 $x\in H$.这时 $x\notin V_0$.于是存在 $U_1\in\mathscr{U}$,使 $x\in \mathrm{Int}_\tau U_1$, $U_1\cap(V_0\cup \mathrm{Cl}_\tau K)=\varnothing$.取 $U=U_0\cup U_1$, $V=V_0$,则$\langle U,V\rangle\in D_x$,$\langle U,V\rangle\leqslant\langle U_0,V_0\rangle$. 当 $x\in K$ 时可以类似论证,这说明了 D_x 是$(\boldsymbol{P},\leqslant)$中的稠密集. 由 $|H\cup K|<2^\omega$,存在 generic filter G,对所有 $x\in H\cup K$, $G\cap D_x\neq\varnothing$. 现在令

$$U_H=\bigcup\{\mathrm{Int}_\tau U:\exists V\text{ 使}\langle U,V\rangle\in G\},$$

$$V_K=\bigcup\{\mathrm{Int}_\tau V:\exists U\text{ 使}\langle U,V\rangle\in G\}.$$

若 $x\in H$,则由 $G\cap D_x\neq\varnothing$推出 $x\in U_H$. 因此 $H\subset U_H$. 同理有 $K\subset V_K$. 下面证明 $U_H\cap V_K=\varnothing$. 设 $U_0\in\mathscr{U}$使 $\mathrm{Int}_\tau U_0\subset U_H$,则存在 V_0 使$\langle U_0,V_0\rangle\in G$. 又设 $V_1\in\mathscr{U}$使 $\mathrm{Int}_\tau V_1\subset V_K$,则存在 U_1 使$\langle U_1,V_1\rangle\in G$. 于是存在$\langle U,V\rangle\in G$ 使$\langle U,V\rangle\leqslant\langle U_0,V_0\rangle$和$\langle U,V\rangle\leqslant\langle U_1,V_1\rangle$. 这样便有 $U_0\subset U$, $V_1\subset V$,从而 $U_0\cap V_1=\varnothing$. 由 U_0, V_1 的任意性,最后有 $U_H\cap V_K=\varnothing$.

2.1.17 推论(MA+¬ CH) 若(X,τ)有一个可数的 T_2 分离开覆盖 $\mathscr{S}$.又设以 $\mathscr{S}$作为子基生成的拓扑 ρ 满足 2.1.16 的条件(3),则(X,τ)中任意两个互不相交的、势 $<c$ 的子集是分离的.

特别地,MA+¬ CH 蕴涵着 $\mathbf{R}^n$ 中任意一对不相交的、势 $<c$ 的集有不相交的邻域. □

从上面的初步介绍可以看出,在应用 Martin 公理解决拓扑学中的问题时,与应用连续统假设时相仿,通常也有两种途径. 一种是用 MA 推出一些纯集论的命题,然后再应用这些命题来处理拓扑学中的问题,如2.1.13,2.1.15 那样. 另一种是直接就某个拓扑学中的问题构造相应的 CCC 半序和稠密集族. 然后应用相应的 generic filter G 作出有关的拓

扑学解说.如 2.1.16 那样,这种途径与应用 CH 相比,难度比较大一些.因为它包含了定义半序、验证 CCC、构造稠密集族等几个步骤.但只要细心揣摩一些范例,对于如何构造半序及稠密集族的技巧,还是有脉络可寻的.比如定理 2.1.16 的证明.我们最终的目标是要找一对分离 H 和 K 的开集,H, K 包含很多的点,我们无法一蹴而就,于是希望找到不相交的开集 U, V,它们至少能分离 H 和 K 中部分的点,即 U 包含 H 一部分,V 包含 K 一部分.而且显然应当要求 $U\cap \mathrm{Cl}_\tau K=\varnothing$ 和 $V\cap \mathrm{Cl}_\tau H=\varnothing$(形式上这比 $U\cap K=\varnothing$, $V\cap H=\varnothing$ 要强一些).当然,U, V 能分离出的 H, K 部分是越大越好,这就自然地规定了 $\langle U_1, V_1\rangle\leqslant\langle U_2, V_2\rangle$ 应当有 $U_2\subset U_1, V_2\subset V_1$,这就是构造 $(P,\leqslant)$ 的思路.至于构造稠密集的思路则是很显然的,取 $H\cup K$ 作为 $\mathscr{B}$ 的指标集那是因为我们的目标就是要分离 H 和 K.掌握了这个思路后,尽管在具体论证过程中还要运用一些技巧,但 Martin 公理是如何地在应用这一点,就变得比较好理解了.

§2 Martin 公理推出的几个组合命题

这一节介绍的主要内容是将 MA 应用于研究 $[\omega]^\omega$ 的无限子集和 ${}^\omega\omega$ 的函数族时得出的几个组合命题.从集论角度看,这些命题本身有其独立的价值,同时它们在拓扑学研究中也是经常用到,并且是很能解决问题的.

2.2.1 定理(MA κ) 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}\subset[\omega]^\omega$, $|\mathscr{A}|\leqslant\kappa$, $|\mathscr{B}|\leqslant\kappa$.又假定 $\forall\mathscr{F}\in[A]^{<\omega}$ 和 $B\in\mathscr{B}$,有 $B-\bigcup\mathscr{F}\in[\omega]^\omega$.则存在 $M\in[\omega]^\omega$,使得

$$\forall A\in\mathscr{A}, M\cap A\in Fin,$$
$$\forall B\in\mathscr{B}, M\cap B\overline{\in} Fin.$$

此处,$Fin=[\omega]^{<\omega}$.

证明 设 $P=\{\langle S,\mathscr{F}\rangle: S\in Fin, \mathscr{F}\in[\mathscr{A}]^{<\omega}\}$.规定 $\langle S_1,\mathscr{F}_1\rangle\leqslant\langle S_2,\mathscr{F}_2\rangle$ 当且仅当(1) $S_2\subset S_1$, $\mathscr{F}_2\subset\mathscr{F}_1$,(2) $\forall A\in\mathscr{F}_2$,有 $S_1\cap A\subset S_2$,亦即 $S_1\cap(\bigcup\mathscr{F}_2)\subset S_2$.

首先注意,$\langle S_1,\mathscr{F}_1\rangle$ 与 $\langle S_2,\mathscr{F}_2\rangle$ 相容当且仅当下列式子成立.

$$[S_2\cap(\bigcup\mathscr{F}_1)\subset S_1]\wedge[S_1\cap(\bigcup\mathscr{F}_2)\subset S_2].\qquad(*)$$

事实上,若($*$)成立,则$\langle S_1\cup S_2,\mathscr{F}_1\cup\mathscr{F}_2\rangle$就是$\langle S_1,\mathscr{F}_1\rangle$与$\langle S_2,\mathscr{F}_2\rangle$的一个下界.反之,若$\langle S,\mathscr{F}\rangle$是$\langle S_1,\mathscr{F}_1\rangle$与$\langle S_2,\mathscr{F}_2\rangle$的下界,则有$S_1\cup S_2\subset S$,$\mathscr{F}_1\cup\mathscr{F}_2\subset\mathscr{F}$.于是$S_1\cap(\bigcup\mathscr{F}_2)\subset S\cap(\bigcup\mathscr{F}_2)$.由$\langle S,\mathscr{F}\rangle\leqslant\langle S_2,\mathscr{F}_2\rangle$,可得$S_1\cap(\bigcup\mathscr{F}_2)\subset S_2$.同理可得$S_2\cap(\bigcup\mathscr{F}_1)\subset S_1$.($*$)式成立.

现在设$\{\langle S_\alpha,\mathscr{F}_\alpha\rangle:\alpha<\omega_1\}\subset\boldsymbol{P}$.因为$|Fin|=\omega$,于是存在$\Gamma\in[\omega_1]^{\omega_1}$和$S\in Fin$,使得$\forall\alpha\in\Gamma,S_\alpha=S$.这时$\forall\alpha,\beta\in\Gamma,\langle S,\mathscr{F}_\alpha\cup\mathscr{F}_\beta\rangle$就是$\langle S_\alpha,\mathscr{F}_\alpha\rangle$和$\langle S_\beta,\mathscr{F}_\beta\rangle$的下界.因而它们是相容的.这就证明了$(\boldsymbol{P},\leqslant)$是 CCC 的.

$\forall A\in\mathscr{A}$,令$D_A=\{\langle S,\mathscr{F}\rangle:A\in\mathscr{F}\}$.

$\forall n<\omega,B\in\mathscr{B}$,令

$$E_{Bn}=\{\langle S,\mathscr{F}\rangle:S\cap B\not\subset\{0,1,\cdots,n-1\}\}.$$

$\mathscr{D}=\{D_A:A\in\mathscr{A}\}\cup\{E_{Bn}:B\in\mathscr{B},n<\omega\}$.

每个D_A是稠密的.因为当$\langle S,\mathscr{F}\rangle\in\boldsymbol{P}$时,有$\langle S,\mathscr{F}\cup\{A\}\rangle\in D_A$,并且$\langle S,\mathscr{F}\cup\{A\}\rangle\leqslant\langle S,\mathscr{F}\rangle$.当$B\in\mathscr{B}$时,由定理的假设,$B-\bigcup\mathscr{F}$是无限集.于是对每个$n$,$B-\bigcup\mathscr{F}\not\subset\{0,\cdots,n-1\}$,取$m>n$,$m\in B-\bigcup\mathscr{F}$,则$\langle S\cup\{m\},\mathscr{F}\rangle\in E_{Bn}$,并且$\langle S\cup\{m\},\mathscr{F}\rangle\leqslant\langle S,\mathscr{F}\rangle$,所以$E_{Bn}$也是稠密的.

因为$|\mathscr{D}|\leqslant\kappa$,MA κ 推出存在 $\mathscr{D}$-generic filter G.令

$$M=\bigcup\{S:\exists\mathscr{F},使\langle S,\mathscr{F}\rangle\in G\},$$

则M为所求.事实上,对每个$A\in\mathscr{A}$,设$\langle S_A,\mathscr{F}_A\rangle\in G\cap D_A$,则$A\in\mathscr{F}_A$.对每个$\langle S,\mathscr{F}\rangle\in G$,它与$\langle S_A,\mathscr{F}_A\rangle$相容.由($*$)有$A\cap S\subset S_A$,于是$A\cap M\subset S_A\in Fin$.设$B\in\mathscr{B}$.对每个$n$,设$\langle S_{Bn},\mathscr{F}_{Bn}\rangle\in G\cap E_{Bn}$,则$S_{Bn}\cap B\not\subset\{0,1,\cdots,n-1\}$.又$B\cap M\supset B\cap S_{Bn}$,所以$B\cap M\not\subset\{0,1,\cdots,n-1\}$.因为$n$是任意的,所以$B\cap M\in[\omega]^\omega$. □

定理 2.2.1 称为 Solovay 定理.下面的一般形式的命题有时也称为 Solovay 定理或命题(S).

(S)　$\forall\mathscr{A},\mathscr{B}\subset[\omega]^\omega$,$|\mathscr{A}|<2^\omega$,$|\mathscr{B}|<2^\omega$,若$\forall\mathscr{F}\in[\mathscr{A}]^{<\omega}$,$B\in$

$\mathscr{B}$,有 $B-\bigcup\mathscr{F}\in Fin$,则 $\exists M\in[\omega]^{\omega}$,使得 $\forall A\in\mathscr{A}, A\cap M\in Fin$. $\forall B\in\mathscr{B}, B\cap M\in[\omega]^{\omega}$. □

由于 MA + ¬ CH = $\forall\kappa<2^{\omega}$, MA κ,因此有

2.2.2 定理 MA + ¬ CH⇒(S). □

2.2.1 的命题还有另外一些等价的说法.

2.2.3 定理 下列各命题彼此等价:

(1) Solovay 定理.

(2) 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}\subset[\omega]^{\omega}$, $|\mathscr{A}|\leqslant\kappa$, $|\mathscr{B}|\leqslant\kappa$,又假定 $\forall\mathscr{F}\in[\mathscr{A}]^{<\omega}$, $B\in\mathscr{B}$,有 $B-\bigcup\mathscr{F}\in[\omega]^{\omega}$,则存在 $S\in[\omega]^{\omega}$,使得 $\forall A\in\mathscr{A}$, $A-S\in Fin$, $\forall B\in\mathscr{B}$, $B-S\in[\omega]^{\omega}$.

(3) (Booth 定理)设 $\mathscr{A}\subset[\omega]^{\omega}$, $|\mathscr{A}|\leqslant\kappa$. 若 $\forall\mathscr{F}\in[\mathscr{A}]^{<\omega}$, $\bigcap\mathscr{F}\in[\omega]^{\omega}$,则存在 $M\in[\omega]^{\omega}$,使得 $\forall A\in\mathscr{A}$, $M-A\in Fin$.

(4) 设 $\mathscr{A}\subset[\omega]^{\omega}$, $|\mathscr{A}|\leqslant\kappa$. 若 $\forall\mathscr{F}\in[\mathscr{A}]^{<\omega}$,有 $\omega-\bigcup\mathscr{F}\in[\omega]^{\omega}$,则存在 $M\in[\omega]^{\omega}$,使得 $\forall A\in\mathscr{A}$,有 $M\cap A\in Fin$.

证明 容易看出(1)与(2)是对偶的. 只要取 $S=\omega-M$,由(1)就可推出(2),取 $M=\omega-S$,就由(2)推出(1). 类似地,(3)与(4)是对偶的. 只要取 $\mathscr{A}^{*}=\{\omega-A: A\in\mathscr{A}\}-Fin$ 即可互相推出.

(1)→(4)取 $\mathscr{B}=\{\omega\}$ 即可.

(3)→(1)设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 如定理 2.2.1 所述,又设 φ 是 $[\omega]^{<\omega}$ 到 ω 上的一个一一对应. 对每个 $A\in\mathscr{A}$,定义 $U_A=\varphi([\omega-A]^{<\omega})$. 对每个 $B\in\mathscr{B}$ 和 n,定义 $V_{Bn}=\varphi(\{S\in Fin:(S-n)\cap B\neq\varnothing\})$. 此处 $n=\{0,1,\cdots,n-1\}$. 下面验证 $\{U_A: A\in\mathscr{A}\}\cup\{V_{Bn}: B\in\mathscr{B}, n<\omega\}$ 满足 Booth 定理的前提条件. 亦即

$\forall\mathscr{F}\in[\mathscr{A}]^{<\omega}$, $\mathscr{H}\in[B\times\omega]^{<\omega}$,

$G=[\bigcap\{U_A: A\in\mathscr{F}\}]\cap[\bigcap\{V_{Bn}:\langle B,n\rangle\in\mathscr{H}\}]$ 是无限集.

首先注意, $\bigcap\{U_A: A\in\mathscr{F}\}=\varphi(\bigcap\{[\omega-A]^{<\omega}: A\in\mathscr{F}\})\supset\varphi([\omega-\bigcup\mathscr{F}]^{<\omega})$. 其次 $\forall B\in\mathscr{B}$, $\{V_{Bn}: n<\omega\}$ 关于 n 是单调下降的. 对任意有限个 $n_1,\cdots,n_k$,取 $m=\max\{n_1,\cdots,n_k\}$,就有 $V_{Bm}\subset\bigcap_{i=1}^{k}V_{Bn_i}$. 设给定 $V_{B_1m_1},\cdots,V_{B_nm_n}$,取 $m=\max\{m_1,\cdots,m_n\}$. 因为 $\varphi(S)\in V_{B_im_i}$ 当且仅当 S

$\in Fin$ 并且$(S-m_i)\cap B_i\neq\varnothing$,所以 $\varphi(S)\in\bigcap_{i=1}^{k}V_{B_i m_i}$当且仅当$S\in Fin$ 并且$\forall i\leqslant n,(S-m_i)\cap B_i\neq\varnothing$.

现在考虑集 $\mathscr{S}=\{S\in Fin:\exists S_1,\cdots,S_n$,满足(1) $S=\bigcup_{i=1}^{n}S_i$,(2) $\forall i\leqslant n,S_i\subset B_i-\bigcup\mathscr{F}-m$,(3) $\forall i\leqslant n,S_i\neq\varnothing\}$.因为当 $i\leqslant n$ 时,$B_i-\bigcup\mathscr{F}$ 是无限集,可知满足条件(2)的 S_i 有无限多个,所以 $\mathscr{S}$是无限集.对每个 $S\in\mathscr{S}$,由(2)知道 $S\subset\omega-\bigcup\mathscr{F}$.于是 $\varphi(S)\in\bigcap\{U_A:A\in\mathscr{F}\}$.又因为$(S-m_i)\cap B_i\supset(S_i-m_i)\cap B_i=S_i\neq\varnothing$,所以 $\varphi(S)\in\bigcap_{i=1}^{n}V_{B_i m_i}$.这就说明了 G 是无限集.

根据 Booth 定理,存在 $S\in[\omega]^{\omega}$,使得$\forall A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B},m<\omega$,$S-U_A$ 与$S-V_{Bm}$都是有限集.记 $S=\{s_j:j<\omega\}$,$M_j=\varphi^{-1}(s_j)$,$M=\bigcup_j M_j$.由于 φ 是一一对应,$\{M_j:j<\omega\}$是互不相交的,所以 M 是无限集,即 $M\in[\omega]^{\omega}$.

对每个 $A\in\mathscr{A}$,注意 $M_j\cap A\neq\varnothing$当且仅当 $M_j\in[\omega-A]^{<\omega}$,亦即 $S_j\notin U_A$.由于 $S-U_A$ 是有限集,A 只与有限个 M_j 相交,于是 $M\cap A\in$ Fin.

对每个 $B\in\mathscr{B}$和 m,注意$(M_j-m)\cap B=\varnothing$当且仅当 $S_j\notin V_{Bm}$.由于 $S-V_{Bm}$是有限集,有无限个 S_j 使 $S_j\in V_{Bm}$,于是$(M_j-m)\cap B\neq\varnothing$,即 $M\cap B-m\supset M_j\cap B-m\neq\varnothing$.由于 m 是任意的,于是 $M\cap B\in[\omega]^{\omega}$. □

考虑下面的命题 $P(c)$.

$P(c)$ $\forall\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(\omega),|\mathscr{A}|<c$.若$\forall\mathscr{F}\in[\mathscr{A}]^{<\omega},\bigcap\mathscr{F}\in[\omega]^{\omega}$,则$\exists M\in[\omega]^{\omega},\forall A\in\mathscr{A},M\overset{*}{\subset}A$. □

注:回忆一下第一章§7中1.7.2的定义.命题 $P(c)$等价于说基数 $p=c=2^{\omega}$.

显然命题 $P(c)$与 Booth 定理说的是同一回事.因此有

2.2.4 定理 MA + ¬ CH$\Rightarrow P(c)\Leftrightarrow p=c$. □

2.2.5 定义 $A,B\in[\omega]^{\omega}$ 称为几乎互斥的,如果 $A\cap B\in Fin$.$\mathscr{A}\subset[\omega]^{\omega}$ 称为一个几乎互斥族(almost disjoint family),记作 adf,如果 $\mathscr{A}$

中任意两个元是几乎互斥的. □

根据 Zorn 引理,任何一个 adf 都被包含在一个极大几乎互斥族(简记为 madf)中,注意 ω^* 有形如 $\{B^*: B\in[\omega]^\omega\}$ 的基. 而 $A^*\cap B^*\neq\varnothing$ 当且仅当 $A\cap B\in[\omega]^\omega$. 我们还知道 ω^* 的胞腔度 $c(\omega^*)=2^\omega$,亦即存在势为 2^ω 的,$[\omega]^\omega$ 的几乎互斥族(参看 Engelking[1971]的 3.6.18). 这说明确实存在势为 c 的 madf. 另外,通过对角线论证可知,任何一个势为可数的 adf 都不是极大的. 那么,是否存在势为 $\kappa,\omega<\kappa<2^\omega$ 的 madf 呢? 下面证明,在 MA + ¬ CH 下,答案是否定的.

2.2.6 定理 $P(c)\Rightarrow$ 每个 madf 都有势 c.

证明 设 $\mathscr{A}\subset[\omega]^\omega$ 是一个 adf. 当 $|\mathscr{A}|\leqslant\omega$ 时,$\mathscr{A}$ 显然不是 madf. 现设 $|\mathscr{A}|>\omega$,设 $\mathscr{F}\in[\mathscr{A}]^{<\omega}$,$\mathscr{F}=\{A_1,\cdots,A_n\}$. 取 $A\in\mathscr{A}-\mathscr{F}$,则 $A\cap[A_1\cup\cdots\cup A_n]=A-(\omega-\bigcup\mathscr{F})\in Fin$. 从而 $\omega-\bigcup\mathscr{F}$ 是无限集. 假如 $|\mathscr{A}|<c$,则由 $P(c)$ 可找到 $M\in[\omega]^\omega$,使得 $\forall A\in\mathscr{A}$,有 $M\cap A\in Fin$. 这表明 $\mathscr{A}$ 不是极大的. □

2.2.7 定理 $P(c)\Rightarrow\forall\kappa,\omega\leqslant\kappa<c$,有 $2^\kappa=2^\omega=c$.

证明 取一个势为 κ 的 adf $\mathscr{A}$. 对每个 $x\in\mathscr{P}(\omega)$,定义 $\varphi(x)=\{A\in\mathscr{A}:|A\cap x|<\omega\}$. 注意对任何 $\mathscr{F}\in[\mathscr{A}]^{<\omega}$ 和 $A\in\mathscr{A}-\mathscr{F}$,有 $A-\bigcup\mathscr{F}\in[\omega]^\omega$,所以对每个 $\mathscr{B}\in\mathscr{P}(\mathscr{A})$,就 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{A}-\mathscr{B}$ 应用定理 2.2.1,可以找到一个 $x\in[\omega]^\omega$,使得 $\forall B\in\mathscr{B}$,有 $x\cap B\in Fin$. 而 $\forall A\in\mathscr{A}-\mathscr{B}$,有 $x\cap A\notin Fin$. 依定义 $\varphi(x)=\mathscr{B}$. 这就证明了 φ 是 $\mathscr{P}(\omega)$ 到 $\mathscr{P}(\mathscr{A})$ 的一个满射. 于是 $|\mathscr{P}(\mathscr{A})|\leqslant|\mathscr{P}(\omega)|$,即 $2^\kappa=2^\omega=c$. □

2.2.8 推论 $P(c)\Rightarrow 2^\omega$ 是正则基数.

证明 由 König 定理,$\forall\kappa<2^\omega$,$\mathrm{cf}\,2^\kappa>\kappa$,但 $\mathrm{cf}\,2^\kappa=\mathrm{cf}\,2^\omega$,这样就有 $\mathrm{cf}\,2^\omega=2^\omega$. □

下面给出由 Wage 作出的、定理 2.2.6 的一个推广.

2.2.9 定理(MA λ) 设 κ 是一个正则基数. $\omega<\kappa\leqslant\lambda<2^\omega$,又设 $\mathscr{A}\subset[\kappa]^\omega$ 是一个 adf(即对任意 $A,B\in\mathscr{A}$,$A\cap B\in[\kappa]^{<\omega}$),$|\mathscr{A}|=\lambda$,则存在 $B\in[\kappa]^\kappa$,使得对所有的 $A\in\mathscr{A}$,$|A\cap B|<\omega$.

证明 设 $\mathscr{A}=\{A_\alpha:\alpha<\lambda\}$,令 $P=\{\langle H,K\rangle:H\in[\mathscr{A}]^{<\omega},K\in[\kappa]^{<\omega}\}$. 规定 $\langle H,K\rangle\leqslant\langle H',K'\rangle$,当且仅当 $H'\subset H$,$K'\subset K$ 并且 $K\cap$

$(\bigcup H')\subset K'$. 今证明$(\boldsymbol{P},\leqslant)$是 CCC PO. 设$\{\langle H_\alpha,K_\alpha\rangle:\alpha<\omega_1\}\subset\boldsymbol{P}$. 由 Δ 系统引理,存在 $M\in[\omega_1]^{\omega_1}$, $n\in\omega$ 和根 H,K,使得对任何 $\alpha,\beta\in M$,有 $H_\alpha\cap H_\beta=H$, $K_\alpha\cap K_\beta=K$. 并且对任何 $\alpha\in M$, $|K_\alpha-K|=n$. 任取 M 的一个可数无限子集 C. 这时$\bigcup\{H_\alpha:\alpha\in C\}$是可数集,而$\{K_\alpha-K:\alpha\in M\}$是互斥族,由于每个 $A\in H_\alpha$ 是κ 的可数子集,可知$\bigcup\{\bigcup H_\alpha:\alpha\in C\}\subset\kappa$ 是可数集. 于是存在 $L\subset M$, $|L|>n$,使得$[\bigcup\{\bigcup H_\alpha:\alpha\in C\}]\cap[\bigcup\{K_\beta-K:\beta\in L\}]=\varnothing$. 注意$\{\bigcup(H_\beta-H):\beta\in L\}$是 adf. 又$|L|>n$,而每个$|K_\alpha-K|=n$,所以存在 $\beta\in L$, $\alpha\in C$,使$(K_\alpha-K)\cap[\bigcup(H_\beta-H)]=\varnothing$. 于是$\langle H_\alpha\cup H_\beta,K_\alpha\cup K_\beta\rangle\in\boldsymbol{P}$,并且它是$\langle H_\alpha,K_\alpha\rangle$, $\langle H_\beta,K_\beta\rangle$的下界.

现在,对所有的 $A\in\mathscr{A}$ 和 $\beta<\kappa$,定义

$$D_A=\{\langle H,K\rangle:A\in H\},$$

$$E_\beta=\{\langle H,K\rangle:\exists\gamma\in K,\gamma>\beta\}.$$

(1) D_A 是稠密的. 对任意$\langle H,K\rangle\in\boldsymbol{P}$, $\langle H\cup\{A\},K\rangle\in D_A$,并且$\langle H\cup\{A\},K\rangle\leqslant\langle H,K\rangle$.

(2) E_β 也是稠密的. 设$\langle H,K\rangle\in\boldsymbol{P}$. 由$|\bigcup H|=\omega$,而 $\kappa>\omega$,故$|\kappa-\bigcup H|=\kappa$. 由此知存在 $\gamma>\beta$,使 $\gamma\notin\bigcup H$. 于是$\langle H,K\cup\{\gamma\}\rangle\leqslant\langle H,K\rangle$,并且$\langle H,K\cup\{\gamma\}\rangle\in E_\beta$.

由 MA λ,存在$\boldsymbol{P}$的一个滤子 G,使得

$$\forall A\in\mathscr{A},\beta<\kappa,\text{有 } G\cap D_A\neq\varnothing, G\cap E_\beta\neq\varnothing.$$

现在令

$$B=\bigcup\{K:\langle H,K\rangle\in G\}.$$

则 B 即为所求. 事实上,对任意 $\beta<\kappa$,设$\langle H,K\rangle\in G\cap E_\beta$,则存在 $\gamma\in K$, $\beta<\gamma$. 所以 B 与κ 是共尾的. κ 是正则基数,所以$|B|=\kappa$. 对任意 $A\in\mathscr{A}$,设$\langle H_A,K_A\rangle\in G\cap D_A$. 又若$\langle H,K\rangle\in G$,则由$\langle H_A,K_A\rangle$与$\langle H,K\rangle$相容,存在$\langle H',K'\rangle\in G$,使得它是$\langle H_A,K_A\rangle$与$\langle H,K\rangle$的公共下界. 于是 $K'\cap A\subset K'\cap(\bigcup H_A)\subset K_A$. 但 $K\subset K'$,所以 $K\cap A\subset K_A$. 由$\langle H,K\rangle$的任意性得出 $B\cap A\subset K_A$. 于是 $B\cap A$ 是有限集. □

最后我们转过来讨论${}^\omega\omega=\{f:f\text{ 是 }\omega\text{ 到 }\omega\text{ 的函数}\}$中的函数族,从 Martin 公理推出两个组合命题,即 BF(κ)和标尺的存在性.

2.2.10 定义 设 $f,g\in{}^{\omega}\omega$. 规定 $f\leqslant^* g$ 当且仅当 $\{n:f(n)>g(n)\}\in Fin$.

设 $\kappa,\lambda\leqslant c$ 是基数.

(1) BF(κ)是指如下命题: $\forall\mathscr{F}\subset{}^{\omega}\omega$. 若 $|\mathscr{F}|<\kappa$, 则 $\mathscr{F}$ 有上界. 即存在 $g\in{}^{\omega}\omega$, $\forall f\in\mathscr{F}$, $f\leqslant^* g$.

(2) $\mathscr{D}\subset{}^{\omega}\omega$ 称为一个控制族, 如果 $\mathscr{D}$ 与 ${}^{\omega}\omega$ 共尾. 即 $\forall f\in{}^{\omega}\omega$, $\exists g\in\mathscr{D}$, $f\leqslant^* g$.

(3) $\{f_\alpha:\alpha<\lambda\}\subset{}^{\omega}\omega$ 称为长 λ 的标尺(scale), 如果它是一个控制族, 并且 $\alpha<\beta\Rightarrow f_\alpha\leqslant^* f_\beta$. □

记
$$b=\min\{|\mathscr{F}|:\mathscr{F}\subset{}^{\omega}\omega \text{ 是无界族}\},$$
$$\delta=\min\{|\mathscr{D}|:\mathscr{D}\subset{}^{\omega}\omega \text{ 是控制族}\}.$$

从定义看出每个控制族都是无界的. BF(κ)成立时有 $\kappa\leqslant b$. 又如果 λ 标尺存在的话有 $\delta\leqslant\lambda$, 所以 $b\leqslant\delta\leqslant\lambda$.

回忆第一章 1.7.2 定义的 sfip 概念, 塔的概念及相应的两个基数 p,t. 在那里我们指出了 $p\leqslant t$. 那么它们与这里定义的 b,δ 有什么关系? 下述定理就是一个回答.

2.2.11 定理 $t\leqslant b$.

证明 设 $\kappa<t$, $\mathscr{G}=\{g_\alpha:\alpha\leqslant\kappa\}\subset{}^{\omega}\omega$. 我们来证明 $\mathscr{G}$ 是有界的. 办法是归纳地作出一个严格递增的函数族 $\{f_\alpha:\alpha\leqslant\kappa\}$, 使它们满足下列条件:

(1) $\forall\xi<\alpha$, $\operatorname{ran}f_\alpha\overset{*}{\subset}\operatorname{ran}f_\xi$.

(2) $\forall n$, $f_\alpha(n)\geqslant\max\{g_\alpha(k):k\leqslant 2n\}$.

f_0 是很容易作出的. 设 $\forall\xi<\alpha$, f_ξ 已经作出, 由归纳条件(1) $\{\operatorname{ran}f_\xi:\xi<\alpha\}$ 是势 $\leqslant\kappa$ 的正序集. 因为 $\kappa<t$, 所以它不是一个塔. 于是存在 $A\in[\omega]^\omega$, 使得对所有 $\xi<\alpha$, $A\overset{*}{\subset}\operatorname{ran}f_\xi$. 归纳地定义 $f_\alpha(n)$, 使得
$$f_\alpha(n)\in A, f_\alpha(n-1)<f_\alpha(n),$$
$$f_\alpha(n)\in\{a\in A:\forall k\leqslant 2n, g_\alpha(k)\leqslant a\}.$$

这时 $\{f_\xi:\xi\leqslant\alpha\}$ 满足归纳条件(1)、(2).

现在证明 f_κ 是 $\mathscr{G}$ 的一个上界. 对任意 $\alpha \leqslant \kappa$, 由 $\mathrm{ran}\, f_\kappa \overset{*}{\subset} \mathrm{ran}\, f_\alpha$, 而 f_κ 又是严格递增的, 所以存在 m, 使得对所有 n, $f_\kappa(m+n) \in \mathrm{ran}\, f_\alpha$. 又因为 f_α 是严格递增的, 所以对所有 n 有 $f_\kappa(m+n) \geqslant f_\alpha(n)$. 由归纳条件(2), $\forall n$, 当 $n \geqslant 2m$ 时, $2(n-m) \geqslant n$, 于是

$$f_\kappa(n) = f_\kappa(n-m+m) \geqslant f_\alpha(n-m) \geqslant g_\alpha(n).$$

这就证明了 $\kappa \leqslant t \Rightarrow \kappa \leqslant b$. 于是 $t \leqslant b$. □

再回过头看定理 2.2.3 中 Booth 定理的陈述. 它实际上等价于说 $p > \kappa$. 这样我们就可以得到如下的定理.

2.2.12 定理 MA $\kappa \Rightarrow \mathrm{BF}(\kappa^+)$. □

2.2.13 定理(MA + ¬ CH) BF(c)成立, 并且存在长为 c 的标尺.

证明 为了证明长为 c 的标尺的存在性, 我们可以从任何一个严格递增的函数 f_α 出发, 重复 2.2.11 中的归纳过程. 由于任何 $\alpha < c$, $\{f_\xi : \xi < \alpha\}$ 都不可能是无界的, 因此这样的过程可以一直持续到 c 步, 最后就可以得到一个长为 c 的标尺(具体地说, 将 ${}^\omega\omega$ 排成 ${}^\omega\omega = \mathscr{G} = \{g_\xi : \xi < c\}$. 在第 α 步作 f_α 时, 不仅要求 $\forall \xi < \alpha$ 有 $f_\xi \leqslant f_\alpha$, 而且要求 $f_\alpha \geqslant g_\alpha$, 这样就可以保证 $\{f_\alpha : \alpha < c\}$ 与 ${}^\omega\omega$ 共尾). □

下面再给出 MA $\kappa \Rightarrow \mathrm{BF}(\kappa^+)$ 的另一种证法, 供读者参考.

证明 固定一个由 $\omega \times \omega$ 到 ω 的一个一一对应 φ. 设 $\mathscr{F} \subset {}^\omega\omega$, $|\mathscr{F}| \leqslant \kappa < 2^\omega$. 当 $f \in \mathscr{F}$ 时, 定义 $A_f = \{\varphi(m,n) : n \leqslant f(m)\}$. 当 $m \in \omega$ 时, 定义 $B_m = \{\varphi(m,n) : n < \omega\}$. 记 $\mathscr{A} = \{A_f : f \in \mathscr{F}\}$, $\mathscr{B} = \{B_m : m \in \omega\}$. 容易验证 $\forall \mathscr{S} \in [\mathscr{F}]^{<\omega}$ 和 $B_m \in \mathscr{B}$, 有 $|B_m - \bigcup \mathscr{S}| = \omega$. 于是由 Solovay定理, 存在 $M \in [\omega]^\omega$, 使得对所有 $f \in \mathscr{F}$, 有 $|M \cap A| < \omega$, 对所有 m, 有 $|M \cap B_m| = \omega$. 现在对任意 m, 选 $g(m) \in \omega$, 使 $\varphi(m, g(m)) \in M$, 得到 $g \in {}^\omega\omega$. 注意 $\varphi(m, g(m)) \in A_f$, 当且仅当 $g(m) \leqslant f(m)$. 由于 $|M \cap A_f| < \omega$, 所以 $\{m : g(m) \leqslant f(m)\} \in \mathrm{Fin}$, 即 $f \leqslant g$. 于是 g 是 $\mathscr{F}$ 的一个上界. □

§ 3 MA + ┐ CH 蕴涵不存在 Lusin 集和 Sierepinski 集

在第一章 § 1 我们介绍了 Lusin 集和 Sierepinski 集的概念，并且在 CH 下证明了这两种集的存在性. 这一节我们将证明，若承认 MA + ┐ CH，则不存在 Lusin 集和 Sierepinski 集. 由此可知这两种集的存在与否是独立于 ZFC 公理系统的.

2.3.1 定理(MAκ) 设 X 是一个有可数基的空间. $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是一族 nwd 集，则 $\bigcup\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是一个 meager 集.

证明 取 X 的一个可数基 $\mathscr{U} = \{U_n : n < \omega\}$，使得对每个 $U \in \mathscr{U}$，$|\{n : U_n = U\}| = \omega$. 定义 $B_n = \{m : U_m \subset U_n\}$，$\mathscr{B} = \{B_n : n < \omega\}$. $A_\alpha = \{n : U_n \cap X_\alpha \neq \varnothing\}$，$\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$. 注意对任何 $\mathscr{F} = \{A_{\alpha_1}, \cdots, A_{\alpha_n}\} \in [\mathscr{A}]^{<\omega}$ 和 n，由于 $X_{\alpha_1} \cup \cdots \cup X_{\alpha_n}$ 是 nwd 集，$U_n - (X_{\alpha_1} \cup \cdots \cup X_{\alpha_n})^- \neq \varnothing$. 这表明 $|B_n - \bigcup \mathscr{F}| = \omega$. 于是存在 $M \in [\omega]^\omega$，使得对每个 $A \in \mathscr{A}$，$|A \cap M| < \omega$，而对每个 n，$|B_n \cap M| = \omega$. 令

$$Y_n = X - \bigcup\{U_m : m \in M, m > n\}.$$

显然 Y_n 是闭集.

(1) Y_n 是无处稠密的. 设 $U_k \in \mathscr{U}$. $U_k - Y_n = \bigcup\{U_k \cap U_m : m \in M, m > n\}$. 因为 $B_k \cap M$ 是无限的，所以存在 $m > n$，使 $m \in B_k \cap M$. 于是 $U_m \subset U_k - Y_n$.

(2) $\bigcup\{Y_n : n < \omega\} = \bigcup\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$. 因为每个 $A_\alpha \cap M$ 是有限集，所以存在 n，当 $m > n$ 和 $m \in M$ 时，有 $m \notin A_\alpha$. 于是 $U_m \cap X_\alpha = \varnothing$. 由此得出 $X_\alpha \subset Y_n$.

综合(1)、(2)便证明了 $\bigcup\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是 meager 集. □

2.3.2 推论(MA + ┐ CH) $\mathbf{R}$ 中任何一个势 $< c$ 的集都是 meager 集，从而 $\mathbf{R}$ 中不存在 Lusin 集. □

2.3.3 定理(MA κ) 记 m 为 $\mathbf{R}$ 上的 Lebesgue 测度. 设 $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是一族 L 可测集，$m(E_\alpha) = 0$，则 $E = \bigcup\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 还是 L 可测的，并且 $m(E) = 0$.

证明 给定 $\epsilon>0$,定义

$$P=\{U\subset\mathbf{R}: U\text{ 是开集,并且 } m(U)<\epsilon\}.$$

规定 $U\leqslant V$ 当且仅当 $V\subset U$.这时 U、V 相容的充要条件是存在开集 W,使 $m(W)<\epsilon$,并且 $U\cup V\subset W$.

(1) $(\boldsymbol{P},\leqslant)$ 是 CCC 的. 设 $\mathscr{B}$ 是由 $\mathbf{R}$ 中所有以有理数为端点的开区间的有限并组成的开集族. 易见 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个可数基. 设 $\mathscr{S}\subset\boldsymbol{P}$, $|\mathscr{S}|>\omega$. 记 $\mathscr{S}_n=\left\{U\in\mathscr{S}: m(u)<\epsilon-\frac{1}{n}\right\}$,则 $\mathscr{S}=\bigcup_n\mathscr{S}_n$,取一个 n,使 $|\mathscr{S}_n|>\omega$. 这时 $U\in\mathscr{S}_n$ 当且仅当 $m(U)+\frac{1}{n}<\epsilon$. U 是开集,可以表示成有限个或可数个互不相交的开区间之并. 于是存在有限个互不相交的开区间 $\{(a_i,b_i): i\leqslant l\}$,使 $\bigcup_{i=1}^{l}(a_i,b_i)\subset U$,而 $m(U-\bigcup_{i=1}^{l}(a_i,b_i))<\frac{1}{2n}$,对每个 $i\leqslant l$ 取有理数 p_i,q_i,使 $(p_i,q_i)\subset(a_i,b_i)$,而 $m((a_i,b_i)-(p_i,q_i))<\frac{1}{2nl}$. 记 $U^*=\bigcup_{i=1}^{l}(p_i,q_i)$. 则 $U^*\in\mathscr{B}$, $U^*\subset U$, $m(U-U^*)<\frac{1}{n}$. 因为 $|\mathscr{S}_n|>\omega$,而 $|\mathscr{B}|=\omega$,所以存在 $U,V\in\mathscr{S}_n$,使 $U^*=V^*$. 这时 $m(U\cup V)=m((U-U^*)\cup V)\leqslant m(U-U^*)+m(V)<\frac{1}{n}+\left(\epsilon-\frac{1}{n}\right)=\epsilon$. 因此 $U\cup V\in\boldsymbol{P}$,这就证明了 U,V 是相容的.

(2) $\forall\alpha<\kappa$,令 $D_\alpha=\{U\in\boldsymbol{P}: E_\alpha\subset U\}$. 对任意 $V\in\boldsymbol{P}$,依定义 $m(V)<\epsilon$. 根据 Lebesgue 测度的正则性及 $m(E_\alpha)=0$,存在开集 U,使 $E_\alpha\subset U$,而 $m(U)<\epsilon-m(V)$. 于是 $m(U\cup V)<\epsilon$,即 $U\cup V\in D_\alpha$, $U\cup V\leqslant V$. 所以 D_α 是稠密的.

(3) 记 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha<\kappa\}$,由 MA κ,存在 $\mathscr{D}$-generic filter G. 令 $W=\bigcup G$,则 W 是一个开集,G 是 W 的开覆盖. $\mathbf{R}$ 是遗传 Lindelöf 空间,所以存在可数个 $U_n\in G$,使 $W=\bigcup_n U_n$. 对任意 n, $U_1,\cdots,U_n$ 相容,故 $m(\bigcup_{i=1}^{n}U_i)<\epsilon$. 于是 $m(W)\leqslant\epsilon$.

另一方面,对任何 α,设 $U\in G\cap D_\alpha$,则 $E_\alpha\subset U\subset W$. 于是 $\bigcup\{E_\alpha:\alpha<\kappa\}\subset W$. 由于 ϵ 可以是任意正数,因此 $m(\bigcup\{E_\alpha:\alpha<\kappa\})=0$. □

2.3.4 推论(MA+¬ CH)

(1) $\mathbf{R}$ 中任何一个势 $< c$ 的集都是 Lebesgue 零测度集.

(2) $\mathbf{R}$ 中不存在 Sierepinski 集. □

定理 2.3.2 只是排除了 $\mathbf{R}$ 中存在 Lusin 集的可能性. Kunen[1976a] 则进一步证明了以下定理:

2.3.5 定理(MA+¬ CH) 若 X 是一个至多有可数个孤立点的 T_2 空间,则 X 没有 Lusin 子集. □

它的论证过程在此就不作介绍了.

还可以指出,尽管 MA+¬ CH 蕴涵不存在 Lusin 集和 Sierepinski 集,然而存在 Lusin 集或存在 Sierepinski 集与¬ CH 却是相容的.(参看 Tall[1976a].)

§4 κ-Sorgenfrey 线和乘积空间的正规性

仿紧空间的概念是法国数学家 Dieudonné 于 1944 年提出来的.这一概念的提出及对仿紧性开展的研究,对于点集拓扑学的发展可说是有划时代意义的.两个仿紧空间的乘积是否还是仿紧空间呢? 1947 年 Sorgenfrey 给予了否定回答.他以 $\mathbf{R}$ 中的左闭右开区间族为基构造了一个反例,即著名的 Sorgenfrey 线.这是一个全正规的 Lindelöf 空间.然而它的平方却不是正规的,也不是亚 Lindelöf 的.那么,有没有两个仿紧空间,其乘积不是仿紧的,但仍然保留正规性呢? 这个问题到 1973 年才由 Przymusinski 给出一个相容性的答案.他在 MA+¬ CH 下给出了一个反例.1976 年,Alster 和 Zenor[1976a]用 CH 也构造出了反例.到 1980 年,Przymusinski[1980a]终于给出了绝对的反例.他证明了对任何 $k, m \in \mathbf{N}, k \leq m$,都存在可分的第一可数空间 X,使得

(1) X^n 是仿紧(Lindelöf 或次仿紧)$\Leftrightarrow n < k$.

(2) X^n 是正规(或族正规,即 CWN)$\Leftrightarrow n < m$.

只要取 $k = 2, m = 3$,就能得到所要的反例.这一节,我们将介绍 Przymusinski用 MA+¬ CH 构造的反例.然后再介绍与乘积正规性有关的若干结论.

2.4.1 定义 设 $\omega<\kappa<2^\omega$. Sorgenfrey 线 S 的任何一个势为 κ 的子空间称为 κ-Songenfrey 线. □

不失普遍性,下面提及 κ-Sorgenfrey 线时都假定是 S 中一个稠密子空间,注意 κ-Sorgenfrey 线仍然是遗传 Lindelöf 和遗传可分的空间.

2.4.2 定义 设 X 是一个拓扑空间,X 称为族 Hausdorff 的(简记作 CWH),如果 X 中的任何一个闭离散子集 D 都能被不相交的邻域分离,即存在互不相交的开集族 $\mathscr{U}$,使得 $\forall\, U\in\mathscr{U}$, $U\cap D$ 只包含唯一一个点. □

易知每个族正规空间,特别是每个仿紧空间都是 CWH 空间.

2.4.3 定理(MA+┐CH) 设 $\omega<\kappa<2^\omega$,则任何一个 κ-Sorgenfrey 线 X 的平方是正规、非仿紧的空间.

证明 我们将证明分成两部分.

1. X^2 是正规的.

考虑空间 $S\times S$,记它的拓扑为 σ. 又记 E^2 即平面的欧几里得拓扑为 ρ, X^2 作为 $S\times S$ 的子空间的拓扑为 τ. 显然有 $\rho\subset\sigma$. 并且权 $w(E^2,\rho)=\omega$. 另外,所有的包含边界的正方形关于 ρ 都是紧集,并且构成了 $(S\times S,\sigma)$ 的闭邻域基.

现在,设 H,K 是 (X^2,τ) 中两个不相交的闭集,这时

$$\begin{aligned}H\cap \mathrm{Cl}_\sigma K&=(H\cap X^2)\cap \mathrm{Cl}_\sigma K=H\cap(X^2\cap \mathrm{Cl}_\sigma K)\\&=H\cap \mathrm{Cl}_\tau K=H\cap K=\varnothing.\end{aligned}$$

同理, $K\cap \mathrm{Cl}_\sigma H=\varnothing$. 又 $|H|\leqslant|X^2|\leqslant\kappa<2^\omega$, $|\kappa|<2^\omega$. 于是,应用 Wage 定理 2.1.16,可以找到不相交的 $U,V\in\sigma$,使 $H\subset U$, $K\subset V$. 这时 $U\cap X^2\in\tau$, $V\cap X^2\in\tau$ 分离 H,K.

2. X^2 不是 CWH,从而不是仿紧的.

记 $D=\{(x,-x)=p_x:x\in X\}$,则 D 是 X^2 中一个闭离散集. 假如 D 是分离的,则对每个 $x\in X$,存在 $n=n(x)\in\mathbf{N}$,使 $\left\{\left[x,x+\frac{1}{n(x)}\right)\times\left[-x,-x+\frac{1}{n(x)}\right)\cap X^2:x\in X\right\}$ 互不相交. 由于 $|X|>\omega$,于是存在 n 和不可数集 $M\subset X$,使得 $x\in M$ 时恒有 $n(x)=n$. M 是不可数的,所以

存在 $x_1, x_2 \in M$，使 $|x_1 - x_2| < \frac{1}{2n}$. 这时 $\left[x_1, x_1+\frac{1}{n}\right) \times \left[-x_1, -x_1+\frac{1}{n}\right)$ 与 $\left[x_2, x_2+\frac{1}{n}\right) \times \left[-x_2, -x_2+\frac{1}{n}\right)$ 的交在 S^2 中是不空开集. 由于 X 在 S 中是稠密的，它包含有 X^2 中的点. 这就导致了矛盾，因此 X^2 不是 CWH 空间. □

下面我们介绍 Alster 与 Przymusinski [1976] 中提出的协可度量（Co-metrizable）空间的定义.

2.4.4 定义 拓扑空间 (X, τ) 称为协可度量的，如果 X 有一个可分的度量拓扑 ρ，使 $\rho \subset \tau$，并且对每个 $x \in X$ 及 x 的 τ 邻域 U，都存在 x 的 τ 邻域 V，使 $V \subset \mathrm{Cl}_\rho V \subset U$. □

换句话说，(X, τ) 是协可度量的意味着存在一个比 τ 弱的度量拓扑 ρ，使得 (X, τ) 关于 ρ 是正则的.

协可度量空间类包含了许多著名的不可度量的空间，例如 Sorgenfrey 线，Niemytski 半平面，Heath 的泡泡空间和 V 空间，$\mathbf{R}$ 上全体有限子集的 P-R 空间，$\mathbf{R}$ 上的密度拓扑空间等. 因此，下面关于协可度量空间的正规性定理，也就具有普遍的意义.

2.4.5 定理（MA κ） 设 X 是一个协可度量空间，$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是由紧子集组成的集族，$|\mathscr{A}| < \kappa$，$|\mathscr{B}| < \kappa$. 记 $A = \bigcup \mathscr{A}$，$B = \bigcup \mathscr{B}$. 若 $A \cap B = \varnothing$，则

(1) 存在不相交的开集 U_A, V_B，使 $A \subset U_A$，$B \subset V_B$.

(2) 存在 F_σ 集 H，使 $A \subset H \subset X - B$.

证明 设 ρ 是相应的可分度量拓扑. $\mathscr{W} = \{W_n : n < \omega\}$ 是 (X, ρ) 的一个对有限并运算封闭的可数基.

1. 设

$\boldsymbol{P} = \{(U, V) : U, V \in \tau$，满足 $\mathrm{Cl}_\rho U \cap B = \varnothing$，$\mathrm{Cl}_\rho V \cap A = \varnothing$，同时 $\exists\, W \in \mathscr{W}$，使 $U \subset W \subset X - V\}$.

规定 $(U_1, V_1) \leqslant (U_2, V_2)$ 当且仅当 $U_2 \subset U_1$，$V_1 \subset V_2$.

$(\boldsymbol{P}, \leqslant)$ 是一个 PO. 对每个 n，令 $\boldsymbol{P}_n = \{(U, V) \in \boldsymbol{P} : U \subset W_n \subset X - V\}$，则 $\boldsymbol{P}_n$ 是定心的. $\boldsymbol{P} = \bigcup_n \boldsymbol{P}_n$，因此 $(\boldsymbol{P}, \leqslant)$ 是 σ-定心的，从而是 CCC

PO.

对每个$A_\alpha \in \mathscr{A}$,令

$$D_\alpha = \{(U,V) \in \boldsymbol{P} : A_\alpha \subset U\},$$

则 D_α 是稠密的,这是因为,若$(U,V) \in \boldsymbol{P}$,则存在 $W \in \mathscr{W}$,使 $U \subset W \subset X - V$. A_α 是紧集,根据协可度量的定义及 $\mathscr{W}$关于有限并封闭,存在 $W' \in \mathscr{W}$使 $A_\alpha \subset W' \subset \mathrm{Cl}_\rho W' \subset X - B$. 现在令 $U_1 = U \cup (W' \cap V)$, $V_1 = V$,则$(U_1, V_1) \in \boldsymbol{P}$,并且$(U_1, V_1) \in D_\alpha$, $(U_1, V_1) \leqslant (U, V)$. 类似地,对每个 $B_\beta \in \mathscr{B}$,令 $E_\beta = \{(U,V) \in \boldsymbol{P} : B_\beta \subset V\}$,则 E_β 也是稠密的. 由 MAκ,存在 generic filter G,使得$\forall \alpha, \beta$, $G \cap D_\alpha \neq \varnothing$, $G \cap E_\beta \neq \varnothing$. 令

$$U_A = \bigcup \mathrm{dom}\ G,\ V_B = \bigcup \mathrm{ran}\ G.$$

则 U_A, V_B 即为所求.

2. 将 $\mathscr{W}$ 重新排列成 $\{W_n : n < \omega\}$, 使得 $\forall W \in \mathscr{W}$, $|\{n : W_n = W\}| = \omega$. 对每个 $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$,记

$$D_A = \{n : A \cap W_n \neq \varnothing\},\ E_B = \{n : B \subset W_n\},$$

$$\mathscr{D} = \{D_A : A \in \mathscr{A}\},\ \mathscr{E} = \{E_B : B \in \mathscr{B}\}.$$

我们来证明对任意有限个 $D_{A_1}, \cdots, D_{A_m}$和$E_B \in \mathscr{E}$, $E_B - \bigcup_{i=1}^{m} D_{A_i} \in [\omega]^\omega$. 对每个 $i \leqslant m$,由 $A_i \cap B = \varnothing$及 A_i 是紧集,存在 $U_i \in \mathscr{W}$,使 $A_i \subset U_i \subset \mathrm{Cl}_\rho U_i \subset X - B$. 由于 $\mathscr{W}$对有限并运算封闭,因此存在 $U \in \mathscr{W}$,使$\bigcup_{i=1}^{m} A_i \subset U \subset \mathrm{Cl}_\rho U \subset X - B$. 于是 $B \subset X - \mathrm{Cl}_\rho U$. B 是紧集,存在 $V \in \mathscr{W}$,使 $B \subset V \subset \mathrm{Cl}_\rho V \subset X - \mathrm{Cl}_\rho U$. 若 n 使 $W_n = V$,则 $B \subset W_n$,即 $n \in E_B$, $W_n \cap (\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \varnothing$,即 $n \notin \bigcup_{i=1}^{m} D_{A_i}$. 于是$|E_\beta - \bigcup_{i=1}^{n} D| = \omega$. 根据 Solovay 定理,存在 $M \in [\omega]^\omega$,使得对每个 $A \in \mathscr{A}$, $M \cap D_A$ 是有限的,对每个 $B \in \mathscr{B}$, $M \cap B$ 是无限的. 令 $F_n = X - \bigcup\{W_m : m \in M, m \geqslant n\}$, $H = \bigcup_n F_n$,则容易验证 $A \subset H \subset X - B$. □

2.4.6 引理 设$\{X_j : j \in \mathbf{N}\}$为一族拓扑空间,则 $X^\omega = \prod\{X_j : j \in \mathbf{N}\}$是全正规空间的充要条件是对每个 n, $X^n = \prod\{X_j : j \leqslant n\}$是全正规

空间.

证明 由于全正规性是遗传的,而 X^n 可以作为子空间嵌入 X^ω,所以必要性是明显的.现在,设每个 X^n 是全正规的.为了证明 X^ω 是全正规的,只需证明 X^ω 中的每个闭集 F 都是零集. $\mathscr{C}(X^n, I)$, $\mathscr{C}(X^\omega, I)$ 分别是 X^n 和 X^ω 的全体实连续函数的集,记 P_n 是 X^ω 到 X^n 的投影,则 $\overline{P_n(F)}$ 是 X^n 中的零集.设 $f_n \in \mathscr{C}(X^n, I)$,使 $f_n^{-1}(0) = \overline{P_n(F)}$.又设 φ_n: $X^\omega \to I$ 是按

$$\varphi_n(x) = f_n(P_n(x))$$

的方式定义的函数,则 $\varphi_n \in \mathscr{C}(X^\omega, I)$,并且 $\varphi_n^{-1}(0) = P_n^{-1}(\overline{P_n(F)})$.显然有 $\varphi_n^{-1}(0) \supset F$,从而 $F \subset \bigcap_n \varphi_n^{-1}(0)$.若 $x \notin F$,则存在 n 和 X^n 中一个开集 U,使 $P_n(x) \in U$,而 $(U \times \prod\{X_j : j > n\}) \cap F = \varnothing$,于是 $x \notin \overline{P_n(F)}$,从而 $x \notin \varphi_n^{-1}(0)$.这就证明了 $F = \bigcap_n \varphi_n^{-1}(0)$.然而可数个零集之交还是零集,于是证明了 X^ω 是全正规的. □

2.4.7 定理(MA κ) 设 X 是一个协可度量空间.若 X 可以表示成 $<\kappa$ 个紧集之并,则 X^ω 是全正规的.

证明 设 $\mathscr{K}$ 是 X 的紧集族,满足 $|\mathscr{K}| < \kappa$. $X = \bigcup \mathscr{K}$.

1. 若 A, B 是 X 中的不相交闭集,令 $\mathscr{A} = \{A \cap K : K \in \mathscr{K}, A \cap K \neq \varnothing\}$, $\mathscr{B} = \{B \cap K : K \in \mathscr{K}, B \cap K \neq \varnothing\}$.则由定理 2.4.5 之(1),存在不相交开集 U_A, V_B,使 $A \subset U_A$, $B \subset V_B$.所以 X 是正规的.

2. 设 $G \subset X$ 是任一开集.注意,当 $K \in \mathscr{K}$ 时,由于 X 是次可度量的,因而有 G_δ 对角线. K 是紧集,所以子空间 K 是可度量的. $G \cap K$ 是 K 中的开集,因此是 F_σ 集.于是 $G \cap K$ 是 σ-紧的,由于 $|\mathscr{K}| < \kappa$, $X = \bigcup \mathscr{K}$,因此 G 可表示成 $<\kappa$ 个紧集之并,又 $F = X - G = \bigcup\{F \cap K : K \in \mathscr{K}\}$ 也是 $<\kappa$ 个紧集之并,由定理 2.4.5 之(2),存在 F_σ 集 H,使 $G \subset H \subset X - F = G$.因此 G 是 F_σ 集,这便证明了 X 是全正规空间.

3. 对 X^n,记 $\mathscr{K}^n = \{K_1 \times \cdots \times K_n : K_1, \cdots, K_n \in \mathscr{K}\}$,则 $|\mathscr{K}^n| < \kappa$, $X^n = \bigcup \mathscr{K}^n$.注意协可度量空间的有限或可数积仍是协可度量的,所以由上述第 1 点和第 2 点知 X^n 也是全正规的,再由引理 2.4.6, X^ω 是全正规的. □

§ 5 在讨论紧性、可数紧性和序列紧性之间的关系中的一些应用

紧性、可数紧性和序列紧性三者之间关系的讨论是点集拓扑学的重要课题之一. 对于 T_2 空间, 紧性与序列紧性彼此互不蕴涵, 但二者都蕴涵可数紧性. 众所周知, 可数紧的序列的 T_2 空间是序列紧的, 而序拓扑空间 ω_1 则是序列紧而非紧空间的典型例子, $\beta\omega$ 是紧而非序列紧空间的典型例子. 拓扑空间被称为等紧的(isocompact), 如果它的每个可数紧闭子集都是紧的. 具有等紧性的空间包含有很大一类拓扑空间(参看 Bacon[1970], Davis[1979]和 Arhangelski[1980]). 另外, Chaber 也证明了有 G_δ 对角线的可数紧正则空间是紧的(参看 Gruenhage[1984]的 2.14). 但也有一些问题在 ZFC 内是难以回答的, 只能借助于集论假设得到相容性或独立性的答案. 这一节我们将应用 Martin 公理给出几个问题的回答. 先介绍 Weiss 的一个著名结果, 然后讨论序列紧性有关问题.

2.5.1 引理(MA κ) 设 X 是可分的可数紧 T_2 空间, $\mathscr{U}$ 是 X 的一个开覆盖, $|\mathscr{U}|\leqslant\kappa$, 则存在 $\mathscr{V}\in[\mathscr{U}]^{<\omega}$, 使 $(\bigcup\mathscr{V})^-=X$. (Hechler)

证明 设 S 是 X 的一个可数稠密集, 假如结论不成立, 记 $\mathscr{A}=\{S-U: U\in\mathscr{U}\}$, 则对每个 $\mathscr{F}\in[\mathscr{A}]^{<\omega}$, 有 $|\bigcap\mathscr{F}|=\omega$. 又因为 $|\mathscr{A}|\leqslant\kappa$, 由 MA κ, 存在 $M\in[S]^\omega$, 使得对每个 $U\in\mathscr{U}$, $M-(S-U)=M\cap U$ 是有限集. 注意到 $\bigcup\mathscr{U}=X$, 于是对任意 $x\in X$, 存在 $U\in\mathscr{U}$, 使 $x\in U$. 由于 $M\cap U$ 是有限集, 因此 $x\notin M^c$, 即集 M 没有聚点. 这就与 X 是可数紧的假设矛盾. □

2.5.2 引理 设 X 是一个全的, 可数紧空间, 则 X 的展度(spread) $s(X)=\omega$, 即 X 是遗传 CCC 空间.

($s(X)=\omega\cdot\mathrm{Sup}\{|D|: D\subset X$ 是离散子空间$\}$, $s(X)$ 在 Engelking 的书中被记为 $h_c(X)$.)

证明 假如 $s(X)>\omega$. 则存在势为 ω_1 的离散子空间 $S=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 对每个 α, 存在 X 的开子集 U_α, 使 $U_\alpha\cap S=\{x_\alpha\}$. 记 $U=\bigcup\{U_\alpha:\alpha$

$<\omega_1\}$.由假设,U 是一个 F_σ 集,设 $U=\bigcup_n F_n$.于是存在 n,使 $|F_n\cap S|=\omega_1$.X 的闭子集 F_n 是可数紧的,而 $S\cap F_n$ 仍是子空间 F_n 中的离散子集.它是无限集,这就导致了矛盾.所以 $s(X)=\omega$. □

2.5.3 定理(MA ω_1) 全的,正则可数紧空间一定是紧空间.(Weiss[1978])

证明 设 X 是全的正则可数紧空间.假如 X 不是紧的,则 X 也不是 Lindelöf 空间.于是存在开覆盖 $\mathscr{U}$,它没有可数的子覆盖.取 $Y=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 和 $\{U_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset\mathscr{U}$,使得 $\forall\alpha,x_\alpha\in U_\alpha,U_\alpha\cap\{x_\beta:\beta>\alpha\}=\varnothing$.(即 Y 是一个右分离的子空间.)

(1) Y 是可分的.

假如 Y 不是可分的,则存在 $Z=\{x_{\alpha_\xi}:\xi<\omega_1\}\subset Y$,使得 $\forall\xi,x_{\alpha_\xi}\notin\{x_{\alpha_\eta}:\eta<\xi\}^-\cap Y$($Z$ 是 Y 的左分离的子空间).这时 Z 作为 X 的子空间将是离散的.这与引理 2.5.2 矛盾.

(2) Y 是遗传可分的.这是因为 Y 的任何子空间仍是 X 的右分离子空间.再重复(1)的论证即得.

现在我们来推出矛盾.$\forall\alpha<\omega_1$,取一个开集 V_α,使 $x_\alpha\in V_\alpha\subset\overline{V_\alpha}\subset U_\alpha$.令 $W_\alpha=V_\alpha\cap\bar{Y}$,$\mathscr{W}=\{W_\alpha:\alpha<\omega_1\}$.由 U_α 的作法,有 $|U_\alpha\cap Y|\leqslant\omega$.所以 $|W_\alpha\cap Y|\leqslant\omega$.记 $W=\bigcup\{W_\alpha:\alpha<\omega_1\}$.由于 $\bar{Y}$ 是全的和可数紧的,W 又是 $\bar{Y}$ 的开子集,因此 W 可表示为 $W=\bigcup_n F_n$,其中每个 F_n 是 X 的闭集.于是存在 n,使 $|F_n\cap Y|=\omega_1$.由(2),$F_n\cap Y$ 是可分的.于是 $X'=(F_n\cap Y)^-$ 是可分的可数紧空间.注意 $F_n^-=F_n\subset W$,所以 $X'\subset W=\bigcup\{W_\alpha:\alpha<\omega_1\}$.由引理 2.5.1,存在 $A\in[\omega_1]^{<\omega}$,使 $X'\subset\bigcup\{W_\alpha^-:\alpha\in A\}\subset\bigcup\{V_\alpha:\alpha\in A\}\subset\bigcup\{U_\alpha:\alpha\in A\}$.但另一方面,因为每个 $U_\alpha\cap Y$ 是可数的,所以 $(\bigcup\{U_\alpha:\alpha\in A\})\cap Y$ 只有有限或可数个点.然而 $F_n\cap Y\subset X'$ 又是不可数的,这就导致了矛盾.由此可知 X 是紧空间. □

与定理 2.5.3 的结论相对立的是 Ostaszewski[1976]的结论.他用另一集论假设——◇原理构造出了一个全正规,可数紧而不是紧的空间.这个例子我们将在第四章介绍.综合这两方面的结论,可知全正规可数紧空间是否紧的问题,其答案是独立于 ZFC 的.

现在转到关于序列紧性的讨论.

2.5.4 定理 设 X 是一个可数紧的正则空间.若 $|X|<2^{\omega}$,则 X 是序列紧的.

证明 假若 X 不是序列紧的,这时 X 就有一个由彼此互异的点构成的序列 S,其任何子序列都不收敛.由 X 的可数紧性,每个这样的子序列至少有两个不同的聚点.先取 S 的两个相异聚点 x_0,x_1,并取 x_0, x_1 的邻域 U_0,U_1,使 $\overline{U}_0\cap\overline{U}_1=\varnothing$.记 $S_i=S\cap U_i(i=0,1)$,并把它看做 S 的两个子序列,对 $i=0,1$,又取 S_i 的两个相异聚点 x_{i0},x_{i1},及它们的邻域 U_{i0},U_{i1},使 $\overline{U}_{i0}\cap\overline{U}_{i1}=\varnothing$.记 $S_{ij}=S_i\cap U_{ij}(i,j=0,1)$.归纳地作下去,设 $\forall\sigma\in\bigcup\{{}^k2:k\leqslant n\}$,我们已经作出了子序列 S_σ,点 x_σ 和开集 U_σ,满足:(1) $x_\sigma\in U_\sigma,S_\sigma\subset U_\sigma$;(2) $\sigma\subset\mu\Rightarrow S_\mu\subset S_\sigma$;(3) 若 $|\sigma|=k<n$,则 $\overline{U}_{\sigma\cup\langle k+1,0\rangle}\cap\overline{U}_{\sigma\cup\langle k+1,1\rangle}=\varnothing$.这时 $\forall\sigma\in{}^n2$,取 S_σ 的两个相异聚点 $x_{\sigma\cup\langle n,0\rangle},x_{\sigma\cup\langle n,1\rangle}$ 及邻域 $U_{\sigma\cup\langle n,0\rangle},U_{\sigma\cup\langle n,1\rangle}$,使它们的闭包不相交,然后定义 $S_{\sigma\cup\langle n,i\rangle}=S_\sigma\cap U_{\sigma\cup\langle n,i\rangle}(i=0,1)$.则所作出的新的 S,x,U 仍满足条件(1),(2),(3).于是完成了归纳过程.对任一 $\sigma\in\bigcup_n{}^n2$ 都对应有满足(1)—(3)的 S_σ,x_σ 和 U_σ.

对任意 $\sigma\in{}^\omega2$,记 $\sigma_n=\sigma\upharpoonright_n$,则 $\{\sigma_n:n<\omega\}$ 按包含关系,亦即按函数的扩张关系构成一个单调上升的序列.于是 $\{\overline{S}_{\sigma_n}:n<\omega\}$ 就是 X 中由非空闭子集构成的下降序列.由 X 的可数紧性,其交不空.取 $x_\sigma\in\bigcap_n\overline{S}_{\sigma_n}$,则 $\sigma\to x_\sigma$ 是 ${}^\omega2$ 到 X 的一个映射.若 $\sigma,\mu\in{}^\omega2,\sigma\neq\mu$,则存在 n 使 $\sigma_n=\mu_n$ 但 $\sigma(n)\neq\mu(n)$.这时有 $\overline{U}_{\sigma_{n+1}}\cap\overline{U}_{\mu_{n+1}}=\varnothing$.于是 $x_\sigma\neq x_\mu$.这说明 $\sigma\to x_\sigma$ 是一个单射,从而 $|X|\geqslant2^\omega$.这与假设 $|X|<2^\omega$ 矛盾. □

注:从上述定理的论证看,实际上只需要 X 满足 Urysohn 分离性即可.

2.5.5 定理 每个势 $<2^{\omega_1}$ 的紧 T_2 空间都是序列紧的.(Franklin [1969])

证明 注意一个序列收敛或不收敛,有或没有聚点都不会由于改变该序列有限个项而发生变化,在定理 2.5.4 的论证中,只要在每个归

纳步骤将 $S_{\sigma\cup\langle n,i\rangle} = S_\sigma \cap U_{\sigma\cup\langle n,i\rangle}$ 换为 $S_{\sigma\cup\langle n,i\rangle} \overset{*}{=} S_\sigma \cap U_{\sigma\cup\langle n,i\rangle}$($A \overset{*}{=} B$ 意即 $A\Delta B$ 是有限集),则由于 X 的紧性,归纳过程可以越过 ω 继续进行下去.具体地说,若 α 为后继序数时,归纳步骤与原来的完全一样;而当 α 是极限序数时,取序列 $\{\alpha_n : n < \omega\} \uparrow \alpha$.对每个 $\sigma \in {}^\alpha 2$,令 $\sigma_n = \sigma \upharpoonright_{\alpha_n}$,则 $\sigma_n \upharpoonright \sigma$.所以 $S_{\sigma_0} \overset{*}{\supset} S_{\sigma_1} \overset{*}{\supset} \cdots \overset{*}{\supset} S_{\sigma_n} \overset{*}{\supset} \cdots$.其中每个 S_{σ_n} 都是 S 的一个无限子集.根据第一章的定理 1.7.3 或 1.9.4,存在 S 的无限子集 S_σ,使得对所有 n,$S_\sigma \overset{*}{\subset} S_{\sigma_n}$.于是它们的导集有 $S'_\sigma \subset \bigcap_n S'_{\sigma_n}$.这样归纳过程就可以继续到 ω_1.并作出 ${}^{\omega_1}2 \to X$ 的单射,从而导致矛盾. □

定理 2.5.5 说明每个势 $= c$ 的紧 T_2 空间是序列紧的.自然会问,势为 c 的可数紧正则空间是否序列紧呢?在定理 2.5.7 中我们将给出一个相容性回答.为此先证明一个引理.

2.5.6 引理(MA) 设 X 是任一拓扑空间,$S \in [X]^\omega$,$p \in \bar{S} - S$.如果下列条件之一满足,S 就包含有收敛于 p 的序列.

(1) $\chi(p, \bar{S}) < 2^\omega$.

(2) X 正则,可数紧,并且 $\psi(p, \bar{S}) < 2^\omega$.

(3) X 是 T_2,可数紧,并且 $hL(X) < 2^\omega$.(Malyhin, Shapirovski [1973])

证明 先证(1)的情况.不失普遍性,可假定 $\bar{S} = X$.取 p 的一个局部基 $\mathscr{U}$,使 $|\mathscr{U}| < 2^\omega$.定义 $\mathscr{A} = \{U \cap S : U \in \mathscr{U}\}$,则 $\mathscr{A}$ 满足 Booth 定理的条件.于是存在 $M \in [S]^\omega$,使得对所有的 $U \in \mathscr{U}$,$M \overset{*}{\subset} U$.记 $M = \{x_n : n < \omega\}$,则序列 $\{x_n : n < \omega\}$ 收敛于 p.

对于(2)的情况,应用正则性.取 p 的一个邻域族 $\mathscr{U}$,使 $|\mathscr{U}| < 2^\omega$,$\bigcap\{\bar{U} : U \in \mathscr{U}\} = \{p\}$.定义 $\mathscr{A} = \{\bar{U} \cap S : U \in \mathscr{U}\}$.重复(1)的论证,可以证明 p 是 M 的唯一聚点,从而 $\{x_n : n < \omega\}$ 收敛于 p.

对于(3)的情况,由 $L(X - \{p\}) \leqslant hL(X) < 2^\omega$,存在 p 的邻域族 $\mathscr{U}$,使 $|\mathscr{U}| < 2^\omega$,$\bigcap\{\bar{U} : U \in \mathscr{U}\} = \{p\}$.重复(2)的论证即得. □

2.5.7 定理(MA) 设 X 是紧 T_2 空间,若 $|X| < 2^c$,则 X 是序列紧的.(Malyhin, Shapirovski [1973])

证明 任取一个序列 $S\subset X$. 若 $\bar{S}=S$, 则子空间 S 是势为 ω 的紧 T_2 空间, 从而是可度量的, 显然它有收敛子序列. 若 $\bar{S}\neq S$, 根据 Čech-Pospisil定理(Engelking[1977]3.12.11): 若 X 是紧 T_2 空间, 每个点 p 有 $|\chi(p,X)|\geqslant\kappa$, 则 $|X|\geqslant 2^{\kappa}$, 及定理中 $|X|<2^{c}$ 的假设, 存在点 $p\in\bar{S}-S$, 使 $\chi(p,\bar{S})<2^{\omega}$. 于是由引理 2.5.6 的(1)可知 S 有收敛于 p 的子序列. □

2.5.8 推论(MA) 每个势 $=c$ 的紧 T_2 空间都是序列紧空间. 特别地, $\forall\kappa<2^{\omega}$, $\{0,1\}^{\kappa}$ 和 I^{κ} 都是序列紧空间($I=[0,1]$). □

上述推论中有关乘积的结论还可以改进为:

2.5.9 定理 设 $\{X_{\alpha}:\alpha<\kappa\}$ 是一族序列紧空间. $X=\prod\{X_{\alpha}:\alpha<\kappa\}$.

(1) MA $\kappa\Rightarrow X$ 是可数紧的.

(2) MA $\kappa^{+}\Rightarrow X$ 是序列紧的.

证明 设 $\{x_n:n<\omega\}$ 是 X 中的任一序列. 对每个 $\alpha<\kappa$, 归纳地作 $I_{\alpha}\in[\omega]^{\omega}$ 如下. 令 $I_0=\omega$. 假设 $\forall\xi<\alpha$, I_{ξ} 已经作出, 使得 $\forall\xi<\alpha$, $\{x_n(\xi):n\in I_{\xi}\}$ 在 X_{ξ} 中有极限, 并且 $\xi<\eta<\alpha$ 时有 $I_{\eta}\overset{*}{\subset}I_{\xi}$. 若 α 是后继序数, $\alpha=\xi+1$. 由于 X_{α} 是序列紧的, 显然从 $\{x_n(\alpha):n\in I_{\xi}\}$ 中可取出 $I_{\alpha}\subset I_{\xi}$, 使 $\{x_n(\alpha):n\in I_{\alpha}\}$ 收敛. 若 α 是极限序数, 由 $\alpha<\kappa$ 及 Booth 定理, 存在 A_{α}, 使得 $\forall\xi<\alpha$, $A_{\alpha}\overset{*}{\subset}I_{\xi}$. 再由 X_{α} 是序列紧的, 可作出 $I_{\alpha}\subset A_{\alpha}$ 使 $\{x_n(\alpha):n\in I_{\alpha}\}$ 收敛, 这样完成了归纳过程.

(1) 设 $\forall\alpha<\kappa$, $x_n(\alpha)\to x_{\alpha}\in X_{\alpha}$. 记 $x\in X$, 使 $x(\alpha)=x_{\alpha}$. 对 x 的任一基本邻域 U, 存在 $J\in[\kappa]^{<\omega}$, 使得 $\forall\xi\notin J$, $P_{\xi}(U)=X_{\xi}$(P_{ξ} 为 X 到 X_{ξ} 的投影). 因为 $\bigcap\{I_{\alpha}:\alpha\in J\}$ 是无限集, 所以 $\forall m\in\omega$, $\exists n\in\bigcap\{I_{\alpha}:\alpha\in J\}$ 使 $n>m$, 于是 $x_n\in U$. 因此 x 是 $\{x_n:n<\omega\}$ 的一个丛点. 这说明了 X 是可数紧的.

(2) 若 MA κ^{+} 成立, 则对 $\{I_{\alpha}:\alpha<\kappa\}$ 可以再次应用 Booth 定理得出 I, 使得 $\forall\alpha<\kappa$, $I\overset{*}{\subset}I_{\alpha}$. 设 $\forall\alpha<\kappa$, $\{x_n(\alpha):n\in I_{\alpha}\}\to x_{\alpha}$. 记 $x\in X$ 使 $x(\alpha)=x_{\alpha}$, 则 $\forall\alpha$, 由 $I\overset{*}{\subset}I_{\alpha}$ 推出 $\{x_n(\alpha):n\in I\}\to x(\alpha)$. 于是 $\{x_n:n\in$

$I\}$是$\{x_n: n<\omega\}$的收敛子序列.这就证明了 X 是序列紧的. □

2.5.10 定理(MA κ, κ 是正则基数) 设 X 是可数紧的,并且 $hL(X)<\kappa$,则 X 是序列紧的.

证明 设$\{x_n: n<\omega\}$是 X 中的一个序列.对每个 $I\in[\omega]^\omega$,令

$$F(I)=\bigcap_n \overline{\{x_i: i\in I-n\}},$$

则 $F(I)$是一个非空闭集.我们先证明一定存在 $I\in[\omega]^\omega$,使得$\forall J\in[I]^\omega$,有 $F(J)=F(I)$.如若不然,取 $I_0=\omega$,则存在 $I_1\in[I_0]^\omega$,使 $F(I_1)\neq F(I_0)$.设对 $\xi<\alpha<\kappa$, I_ξ 已经作出,使得 $\xi<\eta<\alpha$ 时有 $I_\eta \overset{*}{\subset} I_\xi$, $F(I_\eta)\subset F(I_\xi)$,但 $F(I_\eta)\neq F(I_\xi)$.若 α 是后继序数, $\alpha=\beta+1$,则由假设,存在 $I_\alpha\in[I_\beta]^\omega$,使 $F(I_\alpha)\neq F(I_\beta)$.若 α 为极限序数,则由 MA κ 及$\alpha<\kappa$,存在 $I_\alpha\in[\omega]^\omega$,使得$\forall \xi<\alpha$,有 $I_\alpha \overset{*}{\subset} I_\xi$.这就完成了归纳过程,得到$\{I_\alpha: \alpha<\kappa\}$.

记 $Z=\bigcap\{F(\alpha): \alpha<\kappa\}$.由于 $L(X-Z)\leqslant hL(X)<\kappa$,存在 $A\in[\kappa]^{<\kappa}$,使 $Z=\bigcap\{F(\alpha): \alpha\in A\}$.记 $\lambda=\operatorname{Sup} A$.因为 κ 是正则基数, $\lambda<\kappa$,于是 $F(I_{\lambda+1})\subset\bigcap\{F(I_\xi): \xi\in A\}=Z$,并且 $F(I_{\lambda+1})\neq Z$.但另一方面又有 $Z=\bigcap\{F(I_\alpha): \alpha<\kappa\}\subset F(I_{\lambda+1})$.这就得出矛盾,它说明确实存在 $I\in[\omega]^\omega$,使得$\forall J\in[I]^\omega$,有 $F(J)=F(I)$.取 $x\in F(I)$,则$\forall J\in[I]^\omega$,有 $x\in F(J)$.因此 x 是$\{x_n: n\in I\}$任何子序列的丛点,亦即$\{x_n: n\in I\}$是收敛于 x 的$\{x_n: n<\omega\}$的子序列. □

在定理 2.1.4 中我们曾经指出 MA κ 等价于说紧 T_2CCC 空间是 κ^+ Baire 的,下面的定理将证明在 MA κ 下,当紧性减弱为可数紧性,CCC 加强为可分时,也有相同结论.

2.5.11 定理(MA κ) 设 X 是正则可分的可数紧空间,则 X 是 κ^+ Baire 的.

证明 设$\mathscr{P}$为 X 的所有非空开集的集,对 $U, V\in\mathscr{P}$,定义 $U\leqslant V$ 当且仅当 $V\subset U$.由于 X 是可分的,可知$(\mathscr{P},\leqslant)$是 CCC PO(实际上是 σ-定心的).设 $\mathscr{G}=\{G_\alpha: \alpha<\kappa\}$是开稠密集族. $\forall \alpha<\kappa$,记 $\mathscr{D}_\alpha=\{P\in\mathscr{P}: \bar{P}\subset G_\alpha\}$.易证 $\mathscr{D}_\alpha$ 是$(\mathscr{P},\leqslant)$的稠密集.由 MA κ,存在 generic filter $\mathscr{H}$,使得$\forall \alpha<\kappa$, $\mathscr{H}\cap\mathscr{D}_\alpha\neq\varnothing$.由 LST 定理(见 2.1.4 后面的注),不失普遍

性，可假设$|\mathscr{H}|<\kappa$. 由$\mathscr{H}\cap\mathscr{D}_\alpha\neq\varnothing$，可知$\forall\alpha$，$\bigcap\{H^-:H\in\mathscr{H}\}\subset G_\alpha$. 从而有$\bigcap\{H^-:H\in\mathscr{H}\}\subset\bigcap\{G_\alpha:\alpha<\kappa\}$. 假若$\bigcap\{H^-:H\in\mathscr{H}\}=\varnothing$，则$\{X-H^-:H\in\mathscr{H}\}$是$X$的一个势$\leqslant\kappa$的开覆盖，由2.5.1的Hechler引理，存在有限集$\mathscr{H}_0\subset\mathscr{H}$，使$\bigcap\{H^-:H\in\mathscr{H}_0\}=\varnothing$. 这与$\mathscr{H}$是一个filter矛盾(注意$X$是可数紧的). 所以$\bigcap\{H^-:H\in\mathscr{H}\}\neq\varnothing$. 从而$\bigcap\{G_\alpha:\alpha<\kappa\}\neq\varnothing$. 于是$X$是$\kappa^+$-Baire的. □

§6 树拓扑和 Aronszajn 树的正规性

这一节我们将介绍一种称为树的半序集和树拓扑的基本知识，它是正序集及其序拓扑的推广. 树是集论中的一个基本概念，许多集论的命题往往都能借助于树的性态来表述和推证. 一方面，树的研究为点集拓扑学提供了一种有力的工具，另一方面，对树的拓扑的研究本身也有其独特的意义. 通过它既丰富了点集拓扑学的内容，同时它也是提供一些重要反例的源泉. 这一节里，我们介绍一些树的基本概念，包括Aronszjan树、Suslin 树和 Kurepa 树，着重讨论在 MA + ¬ CH 下 Aronszajn 树某些有趣的拓扑特征. 至于 Suslin 树我们将在第四章讨论.

2.6.1 定义 设$(T,\leqslant)$是一个半序集.

(1) T称为一个树，如果$\forall x\in T$，$\{t\in T:t<x\}$是T的正序子集.

(2) 对树T中的每个元素x，$(.,x)=\{t:t<x\}$的序型$\alpha\in\mathbf{Ord}$称为x的高(height)，记作$h(x)$.（**Ord** 表示全体序数构成的类）

(3) $\forall\alpha\in\mathbf{Ord}$，则

$$\mathrm{Lev}_\alpha(T)=\{t\in T:h(t)=\alpha\}$$

称为T的第α层(Level),

$$h(T)=\mathrm{Inf}\{\alpha:\mathrm{Lev}_\alpha(T)=\varnothing\}$$

称为T的高.

(4) $x,y\in T$称为相容，如果存在$z\in T$，使$x\leqslant z$，$y\leqslant z$同时成立；x,y称为可比较的，如果$x\leqslant y$或$y\leqslant x$. □

注:对于树来说，两个元素的相容性定义与2.1.1中关于PO中元

素相容性定义恰好相反.之所以这样,是由于习惯的缘故.

2.6.2 命题 设$(T,\leqslant)$是一个树.

(1) x,y 相容当且仅当它们是可比较的.

(2) $A\subset T$ 是一个反链当且仅当任何 $x,y\in A$ 都是不可比较的.

(3) $\forall\alpha<h(T)$,$\mathrm{Lev}_\alpha(T)$都是一个反链.

2.6.3 定义 设$(T,\leqslant)$是一个树.

(1) T 的每个极大链都称为 T 的一个枝(branch).

(2) $C\subset T$ 称为 T 的一条路(path),如果 C 是一个链,并且 $\forall\alpha<h(T)$,$C\cap\mathrm{Lev}_\alpha(T)\neq\varnothing$.

(3) T 称为一个 κ 树(κ 是一正则基数).如果 $h(T)=\kappa$,并且 $\forall\alpha<h(T)$,$|\mathrm{Lev}_\alpha(T)|<\kappa$.显然,若 T 是 κ 树,则 $|T|=\kappa$. □

2.6.4 定义 设$(T,\leqslant)$是一个 κ 树.

(1) T 称为 κ Aronszajn 树,如果 T 的每一个链 C 都有 $|C|<\kappa$.换句话说,κ Aronszajn 树就是没有路的 κ 树.

(2) T 称为 κ Suslin 树,如果 T 的每个链和每个反链都有 $<\kappa$ 的势.

(3) T 称为 κ Kurepa 树,如果 T 至少有 κ^+ 条路.

当 $\kappa=\omega_1$ 时,它们分别简称为 Aronszajn 树、Suslin 树和 Kurepa 树.

□

注:在 ZFC 中确实存在 Aronszajn 树(参看 Kunen[1980]的Ⅱ.5.9).而 ω_2 Aronszajn 树的存在性则与 ZFC 是独立的.在第四章我们将证明,存在 Suslin 树当且仅当存在 Suslin 线(即一个势为 c 的,不可分的,CCC 的,序完备的 LOTS).它也是独立于 ZFC 的,而且已知CH + $\exists$ Suslin 树与 CH + $\neg\exists$ Suslin 树也都是相容的.由于应用 Suslin 线可以造出一个紧 T_2CCC 空间 S,使得 S^2 不是 CCC 的.因此,与 2.1.12 的结论对比,就得到定理 2.6.5.

2.6.5 定理 $\mathrm{MA}\omega_1\rightarrow\neg\exists$ Suslin 树. □

Kurepa 树的存在性与 ZFC 是相容的.由$\diamondsuit^+$可以推出存在 Kurepa 树(Kunen[1980]Ⅱ.7.11),但不存在 Kerepa 树与 ZFC 的相容性,迄今只有在承认大基数的前提下才得到证明.若承认存在强不可达(strongly

inaccesible)基数与 ZFC 相容，则可以推出$\neg\ \exists$Kurepa 树与 ZFC 相容.（见 Kunen[1980]Ⅷ的定理 3.5 第 261 页.）

2.6.6 定义 设$(T,\leqslant)$是一个树，$x\in T$.若 $h(x)=0$，规定 x 是孤立点.若 $h(x)>0$，取$\{(p,q):p,q\in T,p<x<q\}$作为 x 的邻域基.容易验证它满足邻域公理.按这个邻域系统确定的 T 的拓扑称为 T 的树拓扑.它是正则，0 维和局部紧的.并且，若 $h(x)=\alpha$ 是后继序数，则 x 是孤立点.与 LOTS 不同的是，树拓扑通常都不是正规的. □

一个 κ 树 T 称为修剪过的(Well-Pruned)，如果$|\mathrm{Lev}_0(T)|=1$，即 T 只有一个"树兜"，并且$\forall x\in T$，$\forall\alpha\in(h(x),\kappa)$，$\exists y\in T$，使得 $h(y)=\alpha$ 和$y>x$，即每个点都是"发芽"的，设 κ 是任一正则基数，则每个 κ 树都有一个修剪了的κ 子树(参看后面的引理 4.1.6).今后我们仅仅讨论这种树.

2.6.7 定义 树 T 称为特殊的(Special)，如果 T 可以表示为可数个反链之并. □

2.6.8 定理 一个 ω_1 树 T 是特殊的当且仅当树拓扑空间 T 是一个 Moore 空间.(Jones[1965])

证明 (1) 设 T 是一个特殊的 ω_1 树，$T=\bigcup\limits_m A_m$，其中 A_m 是反链.不失普遍性，可假定每个 A_m 都是极大反链.记 $\mathrm{Lim}(\omega_1)$为 ω_1 中全体极限序数的集.$\forall\alpha\in\mathrm{Lim}(\omega_1)$，取一个单调上升序列$\{\alpha_n\}_n$，使 $\alpha_n\uparrow\alpha$.$\forall x\in T$，当 $h(x)=\alpha$ 是后继序数时，$\forall n$，定义 $U_n(x)=\{x\}$，$V_n(x)=\{z\in T:z<x\}\cup\{z\in T:z>x\}$.当 $h(x)=\alpha$ 是极限序数时，$\forall n$，定义 $U_n(x)=\{t\in T:h(t)>\alpha_n,t\leqslant x\}$，$V_n(x)=\{z\in T:z\leqslant x_n\}\cup\{z\in T:z>x\}$(此处 x_n 是 T 中满足 $x_n<x$，同时 $h(x_n)=\alpha_n$ 的唯一元素).现在$\forall m,n$，定义 $\mathscr{G}_{mn}=\{U_n(x):x\in A_m\}\cup\{V_n(x):x\in A_m\}$.由于每个 A_m 是一个极大反链，$\mathscr{G}_{mn}$就是 T 的一个开覆盖.今证明它构成 T 的一个展开.设 $x\in A_m$，G 是包含 x 的一个开集.因为$\{U_n(x):n<\omega\}$构成了 x 的一个局部基，存在 n，使 $U_n(x)\subset G$.今证明$\mathrm{St}(x,\mathscr{G}_{mn})=U_n(x)$.假定 $x\in U_n(y)$，$y\in A_m$，则 $x\leqslant y$，但 $x,y\in A_m$，而 A_m 是反链，所以必有 $y=x$，若 $x\in V_n(y)$，$y\in A_m$，则有 $x<y$ 或 $x>y$，这是不可能的.于是 $\mathrm{St}(x,\mathscr{G}_{mn})=U_n(x)\subset G$.这就证明了 T 是一个 Moore 空间.

(2) 假设 T 有一个展开 $\{\mathscr{G}_n: n<\omega\}$. 不失普遍性,可设 $\mathscr{G}_n$ 的元都是形如 $(s,t]$ 的左开右闭区间. $\forall x\in T$, 设

$$s(x)=\min\{n: \forall y\in \mathrm{St}(x,\mathscr{G}_n), \text{有 } y\leqslant x\}.$$

令

$$T_m=\{x\in T: s(x)=m\}.$$

显然有 $T=\bigcup\limits_m T_m$, 并且 T_m 互不相交. 我们来证明子树 T_m 的每个链的序型或者有限或者等于 ω, 从而 $h(T_m)\leqslant\omega$. 这样 $T_m=\bigcup\limits_n \mathrm{Lev}_n(T_m)$. $\mathrm{Lev}_n(T_m)$ 是子树 T_m 的反链, 从而也是 T 的反链, 于是 $T=\bigcup\limits_m\bigcup\limits_n \mathrm{Lev}_n(T_m)$. 这就证明了 T 是特殊的.

设 C 是 T_m 的一个链. 假若 C 的序型 $>\omega$, 则它包含有一个序型为 $\omega+1$ 的前节. 故不妨设 $C=\{x_0,x_1,\cdots,x_\omega\}$. 由 $\{\mathscr{G}_n: n<\omega\}$ 是 T 的展开, 存在 m, 使 $\mathrm{St}(x_\omega,\mathscr{G}_m)\subset(\cdot,x_\omega]=\{y\in T: y\leqslant x_\omega\}$. 这是 T 中一个正序子集, 利用左开右闭区间的凸性, 存在 $y_1\in T_m$, $y_1<x_\omega$, 使 $\mathrm{St}(x_\omega,\mathscr{G}_m)\cap T_m=(y_1,x_\omega]\cap T_m$.

① 若 $y_1\leqslant$ 某个 x_n, 则 $x_{n+1}\in\mathrm{St}(x_\omega,\mathscr{G}_m)$, 即存在 $G\in\mathscr{G}_m$, 使 x_{n+1}, $x_\omega\in G$. 于是 $x_\omega\in\mathrm{St}(x_{n+1},\mathscr{G}_m)$. 这与 $x_{n+1}\in T_m$ 矛盾.

② 若 $y_1>$ 所有的 x_n, 则存在 $y_2\in T_m$, 使 $y_2<y_1$, 并且 $\mathrm{St}(y_1,\mathscr{G}_m)\cap T_m=(y_2,y_1]\cap T_m$. 重复①中的论证, 可断言 $y_2>$ 所有的 x_n. 依此类推, 可得出一个序列 $y_1>y_2>y_3>\cdots>y_n>\cdots$. 使 $\{y_n: n<\omega\}\subset(\cdot,x_\omega]$, 这与 $(\cdot,x_\omega]$ 是正序集矛盾. □

2.6.9 定理(MA + ¬ CH) 每个 Aronszajn 树都是特殊的. (Baumgartner[1970])

证明 设 $(T,\leqslant)$ 是一个 Aronszajn 树, $\mathbf{Q}$ 是有理数集, $\boldsymbol{P}=\{f: f\in \mathrm{Fn}(T,\mathbf{Q},\omega)$, 并且 $x<y\Rightarrow f(x)<f(y)\}$, 其中 $\mathrm{Fn}(T,\mathbf{Q},\omega)$ 表示由 T 到 $\mathbf{Q}$ 的有限函数的集. 规定 $f\leqslant g$ 当且仅当 $g\subset f$, 则 $(\boldsymbol{P},\leqslant)$ 是一个半序.

(1) $(\boldsymbol{P},\leqslant)$ 满足 CCC.

对 $\boldsymbol{P}$ 的任一个不可数集, 利用 Δ 系统引理, 可以找到一个不可数子集, 它构成一个以 r 为根的拟互斥族, 并且它的每个元 f 都有相同的势 $n+|r|$. 对它的每一个元 f, 记 $\mathrm{dom}(f-r)=\{f_1,\cdots,f_n\}$, 其中 $f_i\in T$, 并

且 $h(f_1)\leqslant h(f_2)\leqslant\cdots\leqslant h(f_n)$. 因为 $\operatorname{ran}f\subset\mathbf{Q}$,注意到 $\{(q_1,q_2,\cdots,q_n)\in\mathbf{Q}^n: q_1\leqslant q_2\leqslant\cdots\leqslant q_n\}$ 是可数集,应用鸽笼原理,可以进一步找到一个不可数的拟互斥子族和 $q_1,\cdots,q_n,q_1\leqslant q_2\leqslant\cdots\leqslant q_n$. 使得对它的任何 f,g 和 $i\leqslant n$,有 $f(f_i)=g(g_i)=q_i$. 由于 $h(T)=\omega_1$, T 是 Aronszajn 树, $\forall\alpha<\omega_1$,有 $|\operatorname{Lev}_\alpha(T)|\leqslant\omega$,所以 $\forall\alpha<\omega_1$, $|\{f\in \boldsymbol{P}:\operatorname{dom} f\subset\bigcup\{\operatorname{Lev}_\xi(T):\xi<\alpha\}\}|$ 是可数的. 于是又可以从中找出一个不可数子族,使它进一步满足,对任何 $f,g,f\neq g$,有

$$\{h(x):x\in\operatorname{dom}(f-r)\}\bigcap\{h(x):x\in\operatorname{dom}(g-r)\}=\varnothing. \qquad (*)$$

我们把这个集记作 L.

$\forall i,1\leqslant i\leqslant n$,不可数集 $\{f_i:f\in L\}$ 作为 T 的子树仍是一个 Aronszajn树. 由 MA + ┐ CH 知它不是 Suslin 树. 于是存在一个势为 ω_1 的反链. 应用鸽笼原理,存在不可数集 $M\subset L$,使得

$$\forall i,1\leqslant i\leqslant n,\{f_i:f\in M\}\text{都是 } T \text{ 的反链}. \qquad (**)$$

把这个族记为 M,并且设 $M=\{f_\alpha:\alpha<\omega_1\}$.

现在设 i,j 是满足 $1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n$ 的一对数, $A=\{(\alpha,\beta):\alpha<\beta<\omega_1,f_{\alpha_i}<f_{\beta_j}\}$, $B=\{(\alpha,\beta):\alpha<\beta<\omega_1,f_{\alpha_i}\not<f_{\beta_j}\}$. 注意 $\forall\alpha<\beta<\gamma$, (α,γ) 与 (β,γ) 不能同属于 A,否则由 $f_{\alpha_i}<f_{\gamma_j}$ 和 $f_{\beta_i}<f_{\gamma_j}$ 及 $(\cdot,f_{\gamma_j}]$ 是正序的,得出 $f_{\alpha_i}\leqslant f_{\beta_j}$ 或 $f_{\beta_i}\leqslant f_{\alpha_i}$. 由 $(*)$, $f_{\alpha_i}\neq f_{\beta_i}$,但这又与 $(**)$ 矛盾. 所以 B 包含有不可数个元. 对所有的 i,j 反复论证,就一定能找到一个不可数集 $\{(\alpha_\xi,\beta_\xi):\xi<\omega_1\}$,使得 $\forall(\alpha,\beta),i\leqslant n,j\leqslant n$,有 $f_{\alpha_i}\not<f_{\beta_j}$ 和 $f_{\beta_i}\not<f_{\alpha_j}$. 现在定义 $h=f_\alpha\bigcup f_\beta$,则 h 是以唯一确定的 $\boldsymbol{P}$ 中的一个元, $h\leqslant f_\alpha$, $h\leqslant f_\beta$,所以 $\boldsymbol{P}$ 是 CCC PO.

(2) $\forall x\in T$,令 $D_x=\{f\in\boldsymbol{P}:x\in\operatorname{dom} f\}$,则 D_x 是稠密集. MA ω_1 $\to\exists$ generic filter G. 令 $\varphi=\bigcup G$,则 φ 是一个由 T 到 $\mathbf{Q}$ 的函数, $\operatorname{dom}\varphi=T$. $T=\bigcup\{\varphi^{-1}(r):r\in\mathbf{Q}\}$ 是可数并,而每个 $\varphi^{-1}(r)$ 都是 T 的一个反链. 这就证明了 T 是特殊的. □

现在来证明本节一个主要定理.

2.6.10 定理(MA + ┐ CH) 每个 Aronszajn 树 T 都是一个正规 Moore 空间. (Fleissner[1975])

证明 由定理2.6.9，$T=\bigcup_n A_n$，其中 A_n 都是极大反链. 设 H,K 是不相交的非空闭集. $\forall x\in T, n<\omega$，令 $U(x,n)=\{t\leqslant x:[t,x)\cap(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\varnothing\}$. 由于 A_n 是极大反链，每个 A_n 都是闭离散集，所以 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 也是闭离散集. 若 $x\notin\bigcup_{i=1}^n A_i$，则存在 t 使 $[t,x]\cap(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\varnothing$. 于是 $[t,x]\subset U(x,n)$. 若 $x\in\bigcup_{i=1}^n A_i$，则存在 $t\leqslant x$，使 $[t,x]\cap(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\{x\}$. 从而 $[t,x)\cap(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\varnothing$. 于是 $t\in U(x,n)$，这就说明 $U(x,n)$ 是包含 x 的开邻域. 还可以进一步证明 $\{U(x,n):n<\omega\}$ 是 x 的局部基，因为 $\forall(s,x]$，若 $s\in A_n$，则有 $U(x,n)\subset(s,x]$.

设 $\boldsymbol{P}=\{f:f\in\mathrm{Fn}(H\cup K,\omega,\omega)$，并且 $\forall x\in\mathrm{dom}\,f\cap H, y\in\mathrm{dom}\,f\cap K$，有 $\overline{U(x,f(x))}\cap K=\overline{U(y,f(y))}\cap H=U(x,f(x))\cap U(y,f(y))=\varnothing\}$.

定义 $f\leqslant g$ 当且仅当 $g\subset f$. 通过 Δ 系统论证可以验证 $(\boldsymbol{P},\leqslant)$ 满足 CCC.

$\forall x\in H\cup K$，令 $D_x=\{f\in\boldsymbol{P}:x\in\mathrm{dom}\,f\}$，则 D_x 是稠密集. 因为 $|H\cup K|\leqslant\omega_1$，由 MA ω_1，存在 generic filter G. 令 $\varphi=\bigcup G$，$U=\bigcup\{U(x,\varphi(x)):x\in H\}$，$V=\bigcup\{U(x,\varphi(x)):x\in K\}$，则 U,V 就是分离 H 和 K 的开集. 这就证明了 T 是正规的. 由定理2.6.8，T 是 Moore 空间. □

为了利用 Aronszajn 树给出一个不可度量的正规 Moore 空间的例子，我们先简单介绍一下 ω_1 中的闭无界集和平稳集的概念及简单性质. 这些内容在第四章还将作进一步的讨论.

2.6.11 定义 $C\subset\omega_1$ 称为一个闭无界集(Closed Unbounded Set，简写成 Cub)，如果 C 是 LOTS ω_1 中的不可数闭子集. $S\subset\omega_1$ 称为平稳的(Stationary)，如果 S 与每个 Cub 都有不空的交. □

从定义看，显然每个闭无界集都是平稳的，但是平稳集不一定是闭无界的.

2.6.12 定理 (1) ω_1 中任意可数个 Cub 的交是 Cub.

(2) 设 $S\subset\omega_1$ 是平稳集，$S=\bigcup_n S_n$，则至少有一个 S_n 是平稳集.

证明 (1) 设 $\{C_n:n<\omega\}$ 是 ω_1 中的 Cub 序列. 先证 $C_1\cap C_2$ 是 Cub. 这只需证明它是无界的. 对任意给定的 $\lambda\in\omega_1$，取 $\alpha_1\in C_1$，使 $\lambda<\alpha_1$，再取 $\beta_1\in C_2$，使 $\beta_1>\alpha_1$，再取 $\alpha_2\in C_1$，使 $\alpha_2>\beta_1$……如此反复做下去，得出序列 $\{\alpha_n\}_n\subset C_1$，$\{\beta_n\}\subset C_2$，使 $\lambda<\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2<\cdots<\alpha_n<\beta_n<\cdots$. 这时 $\lim_n\alpha_n=\lim_n\beta_n=\mu>\lambda$. 由 C_1,C_2 是闭集，有 $\mu\in C_1\cap C_2$. 由此推出对于任何 n，$\bigcap_{i=1}^n C_i$ 是 Cub. 又由于 ω_1 是可数紧的，$\bigcap_n C_n\neq\varnothing$. 假若 $\bigcap_n C_n$ 有上界 λ，则 $A=[\lambda,\omega)$ 是一个 Cub. 于是每个 $C_n\cap A$ 是 Cub. 由以上的推理应有 $\bigcap_n(C_n\cap A)\neq\varnothing$. 这与 $\bigcap_n C_n\subset[0,\lambda)$ 矛盾，所以 $\bigcap_n C_n$ 是 Cub.

(2) 若对每个 n，S_n 不是平稳的，则存在 Cub C_n，使 $C_n\cap S_n=\varnothing$. 故 $S\cap(\bigcap_n C_n)=\varnothing$. 而 $\bigcap_n C_n$ 是 Cub，与 S 是平稳集的假设矛盾. □

2.6.13 定理(MA+┐CH) 设 T 是一个 Aronszajn 树，则 T 是一个局部紧，不可分，不可度量的正规 Moore 空间.

证明 由定义 2.6.6，定理 2.6.8 和定理 2.6.10，只需证明 T 是不可分和非 CWH 就够了. 对 T 的任何一个可数子集 M，$h(M)=\mathrm{Sup}\{h(x):x\in M\}<\omega_1$. 但 $\omega_1=h(T)$，所以 M 不是稠密集. 于是 T 不可分. 对每个极限序数 $\alpha<\omega_1$，取 $x_\alpha\in\mathrm{Lev}_\alpha(T)$. 设 $T=\bigcup_n A_n$，A_n 是 T 的反链，由定理 2.6.12，存在 n，使 $S=\{\alpha:x_\alpha\in A_n\}$ 是 ω_1 的平稳子集. $D=\{x_\alpha:\alpha\in S\}\subset A_n$ 是 T 的一个反链，因而是闭离散集. 对 $\alpha\in S$，设 $(y_\alpha,x_\alpha]$ 是 x_α 的一个邻域，取 $z_\alpha\in(y_\alpha,x_\alpha)$，记 $\varphi(\alpha)=h(z_\alpha)$，则 $\varphi(\alpha)<\alpha$. 由 Pressing-down 引理，存在平稳集 $\tilde{S}\subset S$ 和 λ，使得 $\forall\alpha\in\tilde{S}$，$\varphi(\alpha)=\lambda$. 因为 $\mathrm{Lev}_\lambda(T)$ 可数而 $\tilde{S}$ 不可数，所以存在 $\alpha,\beta\in\tilde{S}$，使 $z_\alpha=z_\beta=z\in(y_\alpha,x_\alpha]\cap(y_\beta,x_\alpha]$. 这说明 D 不能邻域分离，即 T 不是 CWH 空间. □

但是，在第三章我们将证明，在弱连续统假设 $2^\omega<2^{\omega_1}$ 下，定理 2.6.10 中的树 T 不是正规空间(见 3.1.14).

§7 关于 Calibre 问题的一些例子

这一节我们先介绍周浩旋用 MA + ¬ CH 构造的一个关于 Cal(ω_1,ω)不具有可乘性的例子. 这个空间在构造方法上有一定的启发性. 然后再介绍有 Cal ω_1 但不是可分的, 第一可数 T_2 空间的例子.

2.7.1 定义 拓扑空间 X 称为有 Cal(ω_1,ω), 如果 X 的任何一个点有限开集族都有 $\leqslant\omega$ 的势. □

从定义容易看出有 Cal $\omega_1\Rightarrow$Cal(ω_1,ω)$\Rightarrow$CCC. 另外我们也知道, 任意多个有 Cal ω_1 的空间的乘积有 Cal ω_1(Sanin[1948]), 而 CCC 空间的乘积是否 CCC 则与 ZFC 独立(见 1.11.4 和 2.1.13). 自然会问 Cal(ω_1,ω)的乘积保持性问题. 1986 年我们已注意到, 利用 Δ 系统论证可以证明, 设$\{X_\alpha:\alpha\in A\}$是一族有 Cal(ω_1,ω)的空间, 则 $\prod\{X_\alpha:\alpha\in A\}$有 Cal($\omega_1,\omega$)当且仅当$\forall J\in[A]^{<\omega}$, $X_J=\prod\{X_\alpha:\alpha\in J\}$有Cal($\omega_1,\omega$). 因此 Cal($\omega_1,\omega$)的可积性取决于是否任意两个有 Cal($\omega_1,\omega$)的空间之积仍有 Cal($\omega_1,\omega$). 我们还注意到由 Suslin 线可以作出一个紧 T_2, 第一可数 CCC 空间其乘积不是 CCC, 因而没有 Cal(ω_1,ω). 另外, Galvin 和 Laver 用 CH 也造出了紧 CCC 空间其乘积不是 CCC 的例子. 于是便问周浩旋, 是否 MA + ¬ CH 能蕴涵 Cal(ω_1,ω)的可乘性(就像 CCC 一样). 不久, 周浩旋就在 MA + ¬ CH 下给出了一个反例. 后来他去美国, 经过进一步研究, 与 Watson 在 1989 年共同发表了一篇文章[1989], 给出了一个绝对反例. 1994 年, Todorcvic 在[1994]这篇短文中给出了第一可数的绝对反例. 利用这个结果, 结合 Reed 的"Moore 化机器", 可以得出即使是两个具有 Cal(ω_1,ω)的 Moore 空间, 其乘积也不一定有 Cal(ω_1,ω).

下面给出定理 2.2.9 的一个推论.

2.7.2 定理(MA + ¬ CH) 设 f 是一个 ω_1 到 ω_1 上的映射, 使得 $\forall\gamma<\omega_1$, $|f^{-1}(\gamma)|=n$. 设 $\mathscr{F}\subset[\omega_1]^\omega$ 是一个 adf, 使得 $\forall F\in\mathscr{F}$, F 是收敛序列, $|\mathscr{F}|<c$. 则存在 $D\in[\omega_1]^{\omega_1}$, 使得 $\forall F\in\mathscr{F}$,

$|f^{-1}(D)\cap F|<\omega$.

证明 记 $\mathscr{H}=\{f(F):F\in\mathscr{F}\}$. 因为 $\forall\gamma<\omega_1$, $|f^{-1}(\gamma)|=n$, 所以 $f(F)$ 是无限集, 即 $\mathscr{H}\subset[\omega_1]^\omega$. 由 $|\mathscr{H}|\leqslant|\mathscr{F}|<c$ 及定理 2.2.9, 存在 D, 对任意 $f(F)\in\mathscr{H}$, 有 $|D\cap f(F)|<\omega$. 由 $f^{-1}(D)\cap F\subset f^{-1}(D)\cap f^{-1}(f(F))=f^{-1}(D\cap f(F))$, 可知 $|f^{-1}(D)\cap F|<\omega$. □

2.7.3 引理(MA+¬CH) 设 $\Delta=\{\mathscr{D}:\mathscr{D}\subset[\omega_1]^{<\omega},|\mathscr{D}|=\omega_1\}$, 并设 Δ 排序成 $\Delta=\{\mathscr{D}_\alpha:\alpha<c\}$, 则存在 $\mathscr{E}=\{E_\alpha:\alpha<c\}$, $\mathscr{F}=\{F_\alpha:\alpha<c\}$, 满足如下条件:

(1) 每个 E_α,F_α 都是 ω_1 中的收敛序列.

(2) $\mathscr{E}\cup\mathscr{F}$ 是 adf.

(3) $\forall\alpha$, 设 $\mathscr{D}_\alpha=\{d_{\alpha\gamma}:\gamma<\omega_1\}$, 则 $\{\gamma:d_{\alpha\gamma}\subset E_\alpha\}$ 和 $\{\gamma:d_{\alpha\gamma}\subset F_\alpha\}$ 都是无限集.

证明 我们用归纳法来构造 $\mathscr{E}_\alpha,\mathscr{F}_\alpha$, 使它们满足如下条件:

(1) $\beta<\alpha\rightarrow\mathscr{E}_\beta\subset\mathscr{E}_\alpha,\mathscr{F}_\beta\subset\mathscr{F}_\alpha$.

(2) $\forall\alpha$, $\mathscr{E}_\alpha=\{E_\beta:\beta<\alpha\}$, $\mathscr{F}_\alpha=\{F_\beta:\beta<\alpha\}$, 并且 $\mathscr{E}_\alpha\cup\mathscr{F}_\alpha$ 是 adf.

(3) $\forall\alpha$, $\{\gamma:d_{\alpha\gamma}\subset E_\alpha\}$, $\{\gamma:d_{\alpha\gamma}\subset F_\alpha\}$ 都是无限集.

$\alpha=0$ 时, 取 $\mathscr{E}_0=\mathscr{F}_0=\varnothing$.

假设 $\forall\beta<\alpha$, E_β, F_β 均已作好. 考虑 $\mathscr{D}_\alpha$, 由于 $|\mathscr{D}_\alpha|=\omega_1$, $\mathscr{D}_\alpha\subset[\omega_1]^{<\omega}$, 根据 Δ 系统引理, 存在 $\Gamma\in[\omega_1]^{\omega_1}$, 使得 $\{d_{\alpha\gamma}:\gamma\in\Gamma\}$ 构成一个以 r 为根的 Δ 系统, 并且 $\forall\gamma\in\Gamma$, $|d_{\alpha\gamma}|=$ 某个自然数 $n+|r|$.

设 $A=\bigcup\{d_{\alpha\gamma}-r:\gamma\in\Gamma\}$. 作映射 $f:A\rightarrow\Gamma$, 使得 $f(\xi)=\gamma$ 当且仅当 $\xi\in d_{\alpha\gamma}-r$, 亦即 $\forall\gamma\in\Gamma$, $f^{-1}(\gamma)=d_{\alpha\gamma}-r$. 显然有 $|f^{-1}(\gamma)|=n$.

由定理 2.7.2, 注意 $|\mathscr{E}_\alpha\cup\mathscr{F}_\alpha|<2^\omega$, 并且 $\mathscr{E}_\alpha\cup\mathscr{F}_\alpha$ 是 adf, 于是存在 $D\in[\Gamma]^{\omega_1}$, 使得 $\forall\beta<\alpha$, $|f^{-1}(D)\cap(E_\alpha\cup F_\beta)|<\omega$. 在 $f^{-1}(D)$ 中选一个序列 $\{d_{\alpha\gamma_n}:n<\omega\}$, 使得 $\forall n$, $\mathrm{Sup}(d_{\alpha\gamma_n}-r)<\mathrm{Inf}(d_{\alpha\gamma_{n+1}}-r)$. 令 $E_\alpha=[\bigcup_n(d_{\alpha\gamma_n}-r)]\cup r$. 显然 E_α 是一个收敛序列. 再取 $f^{-1}(D)$ 中另一序列 $\{d_{\alpha\gamma'_n}:n<\omega\}$, 使它满足类似的条件, 并且对任何 m,n, $(d_{\alpha\gamma_m}-r)\cap(d_{\alpha\gamma'_n}-r)=\varnothing$. 令 $F_\alpha=[\bigcup_n(d_{\alpha\gamma'_n}-r)]\cup r$. 则 $\mathscr{E}_{\alpha+1}=\{E_\beta:\beta\leqslant\alpha\}$, $\mathscr{F}_{\alpha+1}=\{F_\beta:\beta\leqslant\alpha\}$ 满足归纳条件. 于是 $\mathscr{E}=\{E_\alpha:\alpha<c\}$, $\mathscr{F}=\{F_\alpha:\alpha<c\}$ 即为

所求. □

2.7.4 定理(MA+¬CH) 存在空间 X, Y,它们有 $\mathrm{Cal}(\omega_1, \omega)$,但是 $X \times Y$ 没有 $\mathrm{Cal}(\omega_1, \omega)$.

证明 取 $X = \mathscr{E} = \{E_\alpha : \alpha < c\}$, $Y = \mathscr{F} = \{F_\alpha : \alpha < c\}$. 对每个 $\gamma < \omega_1$,令

$$\hat{\gamma} = \{E \in X : \gamma \in E\}, \check{\gamma} = \{F \in Y : \gamma \in F\},$$

则 $\{\hat{\gamma} : \gamma < \omega_1\}$, $\{\check{\gamma} : \gamma < \omega_1\}$ 分别是 X, Y 的覆盖. 以它们作为子基生成 X 和 Y 的拓扑.

(1) X, Y 有 $\mathrm{Cal}(\omega_1, \omega)$. 我们只需就 X 加以证明. 设 $\mathscr{B} = \{B_\xi : \xi < \omega_1\}$ 是 X 的一个开集族,其中 $B_\xi = \bigcap \{\hat{\gamma} : \gamma \in J_\xi\}$,而 $J_\xi \in [\omega_1]^{<\omega}$,则 $\{J_\xi : \xi \in \omega_1\} \in \Delta$. 设 $\mathscr{D}_\alpha = \{J_\xi : \xi < \omega_1\}$. 由引理 2.7.3 的(3), $\{\xi : J_\xi \subset E_\alpha\}$ 是无限集. 然而 $J_\xi \subset E_\alpha$ 意味着 $E_\alpha \in B_\xi$,因此 $\mathrm{ord}(E_\alpha, \mathscr{B}) \geq \omega$,即 $\mathscr{B}$ 不是点有限的.

(2) $X \times Y$ 没有 $\mathrm{Cal}(\omega_1, \omega)$. 考虑开集族 $\{\hat{\gamma} \times \check{\gamma} : \gamma < \omega_1\}$. 注意当 $\langle E, F \rangle \in X \times Y$ 时,有 $|E \cap F| < \omega$,而 $\langle E, F \rangle \in \hat{\gamma} \times \check{\gamma}$ 当且仅当 $\gamma \in E \cap F$,所以 $\{\hat{\gamma} \times \check{\gamma} : \gamma < \omega_1\}$ 是点有限的. □

定理 2.7.4 中的空间构造中,每个 E 只属于可数个 $\hat{\gamma}$. 所以 X(同理 Y)是第一可数空间. 但一般说 X 不是 T_2 空间. 按照构造方式,为了使 X 成为 T_2 的,要求对任何 α, β 都存在有限集 $J_\alpha \subset E_\alpha$, $J_\beta \subset E_\alpha$,使得对所有不同于 α 和 β 的 γ 有 $(J_\alpha \cup J_\beta) - E_\alpha \neq \varnothing$. 这样的要求看来很难通过修正来实现.

很容易举出有 $\mathrm{Cal}\ \omega_1$ 的不可分空间的例子. 例如取 $\kappa > c$,则 $X = I^\kappa$ 就是,我们也可以举出有 $\mathrm{Cal}(\omega_1, \omega)$,没有 $\mathrm{Cal}\ \omega_1$ 的空间和没有 $\mathrm{Cal}(\omega_1, \omega)$ 的 CCC 空间的例子.

例 1 设 $X = \{f \in {}^{\omega_1}2 : 0 \leq |f^{-1}(1)| < \omega_1\}$. 作为离散空间 $D = \{0, 1\}$ 的乘幂 $\{0,1\}^{\omega_1}$ 的子空间, X 是一个 0 维 CCC, Baire 空间. 从而 X 有 $\mathrm{Cal}(\omega_1, \omega)$,但 X 没有 $\mathrm{Cal}\ \omega_1$(Tall[1974a]).

证明 容易看出 X 是 $\{0,1\}^{\omega_1}$ 的稠密子空间,所以它满足 CCC. 为了证明它是 Baire 的,只需证明 X 是序列紧的即可. 记 $\{f_n : n < \omega\}$ 是 X

中的一个序列. 令 $S=\bigcup_n f_n^{-1}(1)$, $\sigma=\operatorname{Sup}S$. 设 i 是 ω 到 σ 上的一个一一映射. 令

$$P_{k,\varepsilon}=\{n: f_n(i(k))=\varepsilon\}\ (\varepsilon\in\{0,1\}),$$

$$Q_0=\begin{cases}P_{0,0}, \text{若 } P_{0,0}\text{是无限集},\\ P_{0,1}, \text{相反情况};\end{cases}$$

$$Q_{k+1}=\begin{cases}Q_k\cap P_{k+1,0}, \text{若 } Q_k\cap P_{k+1,0}\text{是无限集},\\ Q_k\cap P_{k+1,1}, \text{相反情况}.\end{cases}$$

则存在无限集 $Q\subset\omega$, 使得对每个 k, $Q-Q_k$ 是有限的(参看定理1.9.4), 今定义 f 如下: 当 $\alpha=i(k)$时,

$$f(i(k))=\begin{cases}0, \text{若 } Q_k=Q_{k-1}\cap P_{k,0},\\ 1, \text{相反情况};\end{cases}$$

当 $\alpha\overline{\in}\sigma$ 时, 令 $f(\alpha)=0$.

从定义显然有 $f\in X$. 下面证明子序列 $\{f_n: n\in Q\}$ 收敛于 f. 对任意 k, 由于 $Q-Q_k$ 是有限集, 存在 n_0, 使得对任何 $n\in(Q-n_0)\subset Q_k$. 若 $f_n(i(k))=0$, 则 $n\in P_{k,0}$. 依定义, 有 $f(i(k))=0$. 若 $f_n(i(k))=1$, 则 $n\in P_{k,1}$. 于是 $n>n_0$ 时, 有 $f_n(i(k))=f(i(k))$. 这样, 对所有 α, $\{f_n(\alpha): n\in Q\}$ 收敛于 $f(\alpha)$, 于是 $f_n\to f$.

现在证明 X 没有 Cal ω_1. 将 ω_1 划分成 ω_1 个不相交的集 $\{B_\alpha:\alpha<\omega_1\}$, 其中每个 B_α 有 $|B_\alpha|=\omega_1$. 令

$$U_\alpha=\{f\in X:\exists\beta\in B_\alpha, f(\beta)=1\},$$

则 U_α 是 X 的开稠密集. 因为 $f\in X$ 时有 $|f^{-1}(1)|\leqslant\omega$, 所以 $\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha<\omega\}$ 是点可数的开集族.

例 2 存在全正规 CCC 亚紧的 σ 空间, 它不是 Lindelöf 空间, 所以没有 Cal(ω_1,ω).

这个例子是 Junnila[1979]构造出来的. 由于构造和论证很长, 此处从略.

例 1 显然不是第一可数的, 在第三章我们将证明 $2^\omega<2^{\omega_1}$(弱连续统假设)可以推出正规第一可数亚紧 CCC 空间是 Lindelöf 空间. 由此可知 Junnila 的例子也不可能是第一可数的. 在第三章我们将指出在存在

Q 集的假设下(它可由 MA + ┐ CH 推出),可以构造出正规亚紧 CCC 不可度量的 Moore 空间.这个空间就没有 Cal(ω_1,ω).

第一章 §2 构造出的空间 $\mathscr{K}$ 是一个 CCC Baire 空间.所以有 Cal(ω_1,ω).它是不可分的,因为 CH⇒有 Cal ω_1 的第一可数 T_2 空间是可分的,所以 $\mathscr{K}$ 没有 Cal ω_1.但是 Tall[1977]指出,同一空间 $\mathscr{K}$ 在 MA + ┐ CH下却有 Cal ω_1,从而它是一个有 Cal ω_1 的不可分第一可数空间的例子.

2.7.5 定理(MA + ┐ CH) $\mathscr{K}$ 有 Cal ω_1.

证明 分两步,第一步证明 MA + ┐ CH→$\mathscr{K}$ 是强 Baire 的,第二步证明 ω_1-Baire 和 CCC 可推出有 Cal ω_1.

第一步,定理 1.2.7 中曾经指出$\{\mathscr{F}_n:n<\omega\}$(其中 $\mathscr{F}_n=\{[K,F]:K\in\mathscr{K},F\subset R$ 是紧集,$K\subset F^\circ\subset F,W_n\not\subset F\}$)满足如下两个条件:

(1) $\forall n,\forall K\in\mathscr{K}$,若 $K\in$ 开集 G,则 $\exists[K,F]\in\mathscr{F}_n$,使 $K\in[K,F]^\circ\subset[K,F]\subset G$,并且$[K,F]\in\mathscr{F}_n$.

(2) $\forall\mathscr{A}=\{[K_i,F_i]:i\in I\}\subset\bigcup_n\mathscr{F}_n$,若 $\mathscr{A}$ 有 fip,并且 $\forall n,\mathscr{A}\cap\mathscr{F}_n\neq\varnothing$,则$\bigcap\mathscr{A}\neq\varnothing$.

对任意给定的非空开集 U,记$P_n=\{p\in\mathscr{F}_n:p\subset U,\mathrm{Int}\neq\varnothing\}$,$P=\bigcup_n P_n$.定义 $p\leqslant q$ 当且仅当$p\subset\mathrm{Int}q$,则$(P,\leqslant)$是一个 CCC 半序.

设 $\mathscr{F}=\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$是 $\mathscr{K}$ 的一族 cnwd 集,$\kappa<2^\omega$.

令
$$D_{\alpha n}=\{p\in P_n:p\cap F_\alpha=\varnothing\}.$$
注意对任意 $q\in P$,由于 F_α 是闭无处稠密集,因此有 $q-F_\alpha\neq\varnothing$,$q-F_\alpha\subset U$.由(1),存在 $p\in P_n$,使 $p\subset q-F_\alpha$.于是 $p\in D_{\alpha n}$,$p\leqslant q$.$\mathscr{D}=\{D_{\alpha n}:\alpha<\kappa,n<\omega\}$是势为 κ 的稠密集族,由 MA + ┐ CH,存在 generic filter G,使得对所有 α,n,$G\cap D_{\alpha n}\neq\varnothing$.从而 $G\cap\mathscr{F}_n\neq\varnothing$.$G$ 中任意有限个元是相容的,因而有 fip.由(2),$\bigcap G\neq\varnothing$,但$\bigcap G\subset U$,并且与每个 F_α 不相交,因此 $U-\bigcup_{\alpha<\kappa}F_\alpha\neq\varnothing$.由于 U 的任意性,可知$\bigcup\{F_\alpha:\alpha<\kappa\}$仍是无处稠密集,即 $\mathscr{K}$ 是强 Baire 空间.

第二步,设 X 是ω_2-Baire CCC 空间,$\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是一族开集.记 $Y=\bigcup\mathscr{U}$,这时 Y 是 CCC 空间.记 $D=\{p\in Y:\mathscr{U}$ 在 p 局部可数$\}$,D

显然是 Y 的开子集. 假若 $\mathscr{U}$ 是点可数的,则 D 是稠密集. 因为假若有开集 $V\neq\varnothing$ 使 $V\cap D=\varnothing$,则对任意的 $W\neq\varnothing$, $W\subset V$,有 $\mathrm{ord}(W,\mathscr{U})>\omega$. 所以对任何 $\alpha<\omega_1$, $V-\bigcup\{U_\beta:\beta>\alpha\}$ 是无处稠密集. 由 ω_2-Baire 性, $\bigcup\{V-\bigcup\{U_\beta:\beta>\alpha\}:\alpha<\omega_1\}$ 将是一个无处稠密集. 根据 $\mathscr{U}$ 是点可数的假设, $\bigcup\{V-\bigcup\{U_\beta:\beta>\alpha\}:\alpha<\omega_1\}=V$. 而这是不可能的,所以 D 是稠密的. 于是 $\{D\cap U_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是开子空间 D 上由非空开集组成的不可数族. 它在 D 上局部可数. 但 D 是 CCC 空间,这就导致了矛盾(参看 Burke[1984a]的 8.1). 因此证明了 $\mathscr{U}$ 不是点可数的, X 有 Cal ω_1. □

§8 BF(κ)与 k 空间的乘积

定义 2.2.10 介绍了 BF(κ)这个集论命题,并且证明了 MA $\kappa\to$ BF(κ^+). 20 世纪 80 年代以来, BF(κ)在广义度量空间理论研究上找到了一些很有趣的应用. 这一节我们将介绍 BF(κ)的一些等价命题和 BF(κ)的某些应用.

2.8.1 定义 设 κ 是一个无限基数,对每个 $\alpha<\kappa$,设 $\{x_{\alpha n}:n<\omega\}$ 是一个收敛序列,其极限为 x_α, $\bigoplus\{\{x_{\alpha n}:n<\omega\}\cup\{x_\alpha\}:\alpha<\kappa\}$ 是它们的拓扑和. 定义 S_κ 是这个和将所有的 x_α 粘成一个点而成的商空间. S_κ 也称为 κ 序列扇. □

容易验证上面所述的商映射是个闭映射. 注意 $\bigoplus\{\{x_{\alpha n}:n<\omega\}\cup\{x_\alpha\}:\alpha<\kappa\}$ 是一个局部紧度量空间,因而 S_κ 是一个 Lasnev 空间. 为了讨论方便,我们假定 $S_\kappa=\{x_{\alpha n}:n<\omega,\alpha<\kappa\}\cup\{\infty\}$,每个 $x_{\alpha n}$ 都是孤立点,它们彼此均不相同, $\{x_{\alpha n}:n<\omega\}$ 均收敛于 ∞. 对任意 $f\in{}^\kappa\omega$,即 f 是定义于 κ 取值于 ω 的函数,集 $V(f)=\{x_{\alpha n}:n\geqslant f(\alpha),\alpha<\kappa\}$ 都是 ∞ 的一个邻域.

2.8.2 定义 $\mathscr{D}\subset{}^\kappa\omega$ 称为 ${}^\kappa\omega$ 的一个控制族,如果 $\forall g\in{}^\kappa\omega$, $\exists f\in\mathscr{D}$,使得 $\{\alpha:f(\alpha)<g(\alpha)\}$ 是有限集. $\mathscr{D}\subset{}^\kappa\omega$ 称为在 ${}^\kappa\omega$ 上共尾,如果 $\forall g\in{}^\kappa\omega$, $\exists f\in\mathscr{D}$,使得 $\forall n$, $f(n)\geqslant g(n)$. □

对 $\kappa=\omega$ 的情况. 记

$$\delta=\min\{|\mathscr{D}|:\mathscr{D}\text{为}{}^\omega\omega\text{ 的控制族}\},$$

$$\delta_1 = \min\{|\mathscr{D}| : \mathscr{D}\text{在}{}^{\omega}\omega\text{ 上共尾}\}.$$

注意${}^{\omega}\omega$ 中任一控制族都是无界的，而在${}^{\omega}\omega$ 上的共尾族一定也是控制族，因此 $\mathrm{BF}(\kappa) \to (\kappa \leqslant \delta \leqslant \delta_1)$. 然而实际上可以证明 $\delta_1 = \delta$(参看 van Douwen[1984]，定理 3.6). 假如 $\mathscr{D}$是一个在${}^{\omega}\omega$ 上共尾的族，则$\{V(f): f \in \mathscr{D}\}$就是 S_ω 中点 ∞ 的一个局部基. 所以对于 S_ω 来说，有 $|S_\omega| = |\psi(S_\omega)| = |t(S_\omega)| = |nw(S_\omega)| = \omega$，而 $|w(S_\omega)| = |\chi(S_\omega)| = \delta > \omega$. 对于 S_κ 来说，有 $|\psi(S_\kappa)| = |t(S_\kappa)| = \kappa$. 而 $\kappa < \chi(S_\kappa) \leqslant 2^\kappa$.

下面证明一个核心定理.

2.8.3 定理 设 $\omega < \kappa < 2^\omega$，则 $S_\omega \times S_\kappa$ 是 k 空间(或序列空间)的充要条件是 $\mathrm{BF}(\kappa^+)$成立. (Gruenhage[1980b])

证明 (1) 设 $\mathrm{BF}(\kappa^+)$不成立，于是存在 $F = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset {}^{\omega}\omega$，使得 $\forall f \in {}^{\omega}\omega$，$\exists\, \alpha$，使$\{n : f_\alpha(n) > f(n)\}$是无限集. 现在 $\forall\, \alpha < \kappa$，设

$$H_\alpha = \{\langle m_n, n_\alpha\rangle \in S_\omega \times S_\kappa : m \leqslant f_\alpha(n)\},$$

此处 m_n 和 n_α 分别表示 S_ω 中第 n 个序列的第 m 项(即 S_ω 中的 x_{nm})和 S_κ 中第 α 个序列的第 n 项(即 $x_{\alpha n}$). 记 $H = \bigcup\{H_\alpha : \alpha < \kappa\}$，今证明 H 是 k 闭的，但不是闭集.

设 $K \subset S_\omega \times S_\kappa$ 是紧集，则 K 在每个因子空间中只和有限多个序列相交. 所以$\{\alpha : K \cap H_\alpha \neq \varnothing\}$是有限集.

每个 H_α 都是闭集. 为了看出这一点，注意 $S_\omega - \{\infty\}$和 $S_\kappa - \{\infty\}$的每个点都是孤立点，只须证明$\langle \infty, \infty\rangle$不是 H_α 的聚点即可，$H_\alpha = \bigcup_\alpha \{\langle m_n, n_\alpha\rangle : m \leqslant f_\alpha(n)\}$. 任取 ∞ 的一个 S_κ 邻域 V，记 $U = \{k_n : k > f_\alpha(n)\} \cup \{\infty\}$，其中 k_n 是 S_ω 中第 n 个序列的第 k 项. 设 P_{S_ω} 是 $S_\omega \times S_\kappa$ 到 S_ω 的投影，注意 $P_{S_\omega}(H_\alpha)$与 U 是不相交的，所以$(U \times V) \cap H_\alpha = \varnothing$. 而 $U \times V$ 是点$\langle \infty, \infty\rangle$的一个邻域，这说明 H_α 是闭集. 由于 $K \cap H = \bigcup\{K \cap H_\alpha : \alpha < \kappa\}$实际上是有限并，因此它也是闭的. 由 K 的任意性，知 H 是 k-闭的.

现在证明 H 不是闭的. 设 U 是$\langle \infty, \infty\rangle$的任一邻域，$f \in {}^{\omega}\omega$，$g \in {}^{\kappa}\omega$ 满足如下条件：当 $f(k) \leqslant m$，$g(\alpha) \leqslant n$ 时，$\langle m_n, n_\alpha\rangle \in U$. 由于 $\mathrm{BF}(\kappa^+)$不成立，因此存在 $\alpha < \kappa$ 和无限多个 n，使 $f_\alpha(n) > f(n)$. 这样便存在

n',使 $g(\alpha)\leqslant n'$. 而 $f_\alpha(n')>f(n')$,这意味着$\langle f_\alpha(n')_{n'}, n'_\alpha\rangle\in H_\alpha\cap U$. 所以$\langle\infty,\infty\rangle\in\dot{H}-H$,即 H 不是闭集. 因此 $S_\omega\times S_\kappa$ 不是 k 空间.

(2) 现在设 $\mathrm{BF}(\kappa^+)$成立. 设 $H\subset S_\omega\times S_\kappa$ 是序列闭但非闭的子集.

首先我们证明$\langle\infty,\infty\rangle$是 H 的一个聚点. 如若不然,就存在 $f\in{}^\omega\omega$, $g\in{}^\kappa\omega$,使$(U(f)\times V(g))\cap H-\{\langle\infty,\infty\rangle\}=\varnothing$. 但对任何 $n_m\in S_\omega$, $n_\alpha\in S_\kappa$,闭子空间$\{n_m\}\times S_\kappa$ 和 $S_\omega\times\{n_\alpha\}$都是序列空间,$H$ 是序列闭集,所以$(\{n_m\}\times S_\kappa)\cap H$ 和$(S_\omega\times\{n_\alpha\})\cap H$ 都是闭集,于是 $H-\{\langle\infty,\infty\rangle\}$是闭集,与原设矛盾,因此 $\bar{H}=H\cup\{\langle\infty,\infty\rangle\}$,但$\langle\infty,\infty\rangle$不属于 H 的序列闭包. 另一方面,闭子空间$(\{\infty\}\times S_\kappa)\cup(S_\omega\times\{\infty\})$是序列空间,所以$\langle\infty,\infty\rangle$不能属于 $H\cap[(\{\infty\}\times S_\kappa)\cup(S_\omega\times\{\infty\})]$的序列闭包,亦即闭包. 于是$\langle\infty,\infty\rangle$属于 $H-[(\{\infty\}\times S_\kappa)\cup(S_\omega\times\{\infty\})]$的导集. 故不失普遍性我们可以假定 H 仅包含 $S_\omega\times S_\kappa$ 的孤立点.

对任意固定的 α, $S_\omega\times(\{n_\alpha:n<\omega\}\cup\{\infty\})$是序列空间. 存在 $f_\alpha\in{}^\omega\omega$ 和 $n(\alpha)<\omega$,使$(U(f_\alpha)\times\{m_\alpha:m\geqslant n(\alpha)\})\cap H=\varnothing$. 应用 $\mathrm{BF}(\kappa^+)$,存在 $f\in{}^\omega\omega$,对所有的 $\alpha<\kappa$, $f_\alpha\leqslant f$,对每个 α,令 $k(\alpha)<\omega$,使得当 $k\geqslant k(\alpha)$时,有 $f_\alpha(k)\leqslant f(k)$.

对每个 $\alpha<k$,存在 $n'(\alpha)<\omega$, $n'(\alpha)\geqslant n(\alpha)$,使$[(\bigcup\{\{m_j:m<\omega\}:j<k(\alpha)\})\times\{m'_\alpha:m'\geqslant n(\alpha)\}]\cap H=\varnothing$. 否则存在 $x\in S_\omega$,使$\langle x,\infty\rangle$是 H 的序列极限点. 现在定义 $g\in{}^\kappa\omega$,使 $g(\alpha)=n'(\alpha)$. 假设$\langle m_n, m'_\alpha\rangle\in U(f)\times V(g)$. 若 $n<k(\alpha)$,则因为 $m'\geqslant n'(\alpha)$,有$\langle m_n, m'_\alpha\rangle\overline{\in}H$,所以 $f_\alpha(n)\leqslant f(n)\leqslant m$,从而$\langle m_n, m'_\alpha\rangle\in U(f_\alpha)\times\{p_\alpha:p\geqslant n(\alpha)\}$. 这说明$\langle m_n, m'_\alpha\rangle\overline{\in}\bar{H}$. 于是$(U(f)\times V(g))\cap H=\varnothing$. 这与$\langle\infty,\infty\rangle\in H'$矛盾. 这就证明了 $S_\omega\times S_\kappa$ 是序列空间,因而也是 k 空间. □

2.8.4 推论 $\mathrm{BF}(\kappa^+)$等价于说 $S_2\times S_\kappa$ 是 k 空间(其中 S_2 是 Arens 空间,见 Engelking[1977]1.6.19).

证明 不难看出,存在 S_2 到 S_ω 上的全映射f. 由 Engelking[1977]的3.7.8, $f\otimes id$ 是 $S_2\times S_\kappa$ 到 $S_\omega\times S_\kappa$ 上的全映射. 若 $S_2\times S_\kappa$ 是 k 空间,则 $S_\omega\times S_\kappa$ 也是 k 空间. 若 $S_\omega\times S_\kappa$ 是 k 空间,则由 Engelking[1977]的

3.7.25,作为 $S_\omega \times S_\kappa$ 在 $f \otimes id$ 下的全原像,$S_2 \times S_\kappa$ 也是 k 空间. □

2.8.5 定理 $S_{\omega_1} \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间.(Gruenhage[1980b])

证明 对每个 $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$,设 f_α 是 ω_1 到 ω 的一个函数,使 $f_\alpha \upharpoonright_\alpha$ 是 α 到 ω 上的一个一一对应.定义 $H_\alpha = \{\langle m_\beta, f_\alpha(\beta)_\alpha \rangle \in S_{\omega_1}^2 : m \leqslant f_\alpha(\beta)\}$,并且令 $H = \bigcup\{H_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.我们来证明 H 是 k 闭,但不是闭的.

设 $K \subset S_{\omega_1}^2$ 是个紧集,则 K 仅与每个因子空间中的有限个序列相交,于是 K 仅与有限个 H_α 相交.设 $\beta(1), \cdots, \beta(n)$ 是 K 与 H_α 第一个因子相交的序列,则 $K \cap H_\alpha = \{\langle m_{\beta(i)}, f_\alpha(\beta(i))_\alpha \rangle \in S_{\omega_1}^2 : m \leqslant f_\alpha(\beta(i)), i = 1, \cdots, n\}$ 是有限集.所以 $K \cap H$ 是有限的,因而是闭的.

设 $g \in {}^{\omega_1}\omega$. $U(g)$ 为 ∞ 在 S_{ω_1} 中的邻域,则存在 $n_0 < \omega$ 和一个不可数子集 $A \subset \omega_1$,使 $g \upharpoonright_A \equiv n_0$.取 $\gamma \in A$,使 $\gamma \cap A$ 是无限集,则由 f_γ 的定义,存在 $\delta \in A \cap \gamma$,使 $f_\gamma(\delta) = m > n_0$.于是 $\langle m_\delta, m_\gamma \rangle \in H_\gamma \cap (U(g) \times U(g))$.由 g 的任意性,可知 $\langle \infty, \infty \rangle$ 是 H 的聚点.这就证明了 H 不是 $S_{\omega_1}^2$ 中的闭集. □

2.8.6 引理 设 X 是一个族正规的 Frechet 空间,f 是 X 到 Y 的闭映射,$y \in Y$.若 $\partial f^{-1}(y)$ 包含有一个势为 σ 的闭离散集,则 Y 包含有同胚于 S_σ 的闭子集(即 Y 包含有 S_σ 的闭拷贝).

证明 设 D 是 $\partial f^{-1}(y)$ 的闭离散子集,$|D| = \sigma$.设 $\{U_d : d \in D\}$ 是一个离散开集族,使 $d \in U_d$.由假设,对每个 $d \in D$,可找出一个收敛于 d 的序列 $\{d_n : n \in \mathbf{N}\}$,满足条件:(1) $d_n \in U_d - f^{-1}(y)$;(2) $n \neq m$ 时,$f(d_n) \neq f(d_m)$.设 $E(d_n) = \{d' \in D : f(d'_m) = f(d_n)$ 对某个 m 成立$\}$.由于 f 是闭映射,一定存在 $n(d)$,使得 $\bigcup\{E(d_n) : n \geqslant n(d)\}$ 是有限的.

现在取 $d(0) \in D$.假定对所有的 $\alpha < \beta$,$d(\alpha)$ 已经定义,取 $d(\beta) \in D - \bigcup\{E(d(\alpha)) : \alpha < \beta\}$.设 $D^* = \{d(\alpha) : \alpha < \sigma\} \cup \{d(\alpha)_n : \alpha < \sigma, n \in \mathbf{N}\}$,则 D^* 是 X 中的闭离散集,f 在 $D^* - f^{-1}(y)$ 上是一对一的.因此 $f(D^*)$ 闭于 Y,并且同胚于 S_σ. □

在得到了上述结果之后,Gruenbage 证明了定理 2.8.7.

2.8.7 定理 下述命题等价:

(1) $S_\omega \times S_{\omega_1}$不是 k 空间.

(2) $\neg\ \mathrm{BF}(\omega_2)$.

(3) 若 X,Y 是 Lasnev 空间,则 $X\times Y$ 是 k 空间的充要条件是下面三个命题之一成立:

(i) X 和 Y 都是可度量的.

(ii) X 或 Y 之一是局部紧可度量的.

(iii) X 和 Y 都属于类$\mathfrak{X}'$.

(注:空间类$\mathfrak{X}'$的概念是 Tanaka[1976]中给出来的.他定义$\mathfrak{X}'=\{X$: X 被一个由局部紧闭子集组成的可数族所控制$\}$.换言之,$X\in\mathfrak{X}'$当且仅当存在$\{X_n:n\in\mathbf{N}\}$,其中 X_n 是局部紧闭子集,$X=\bigcup X_n$,并且 $A\subset X$ 是闭集当且仅当每个 $A\cap X_n$ 都是子空间 X_n 中的闭集.他指出,若 $X,Y\in\mathfrak{X}'$,则 $X\times Y\in\mathfrak{X}'$,文中他还证明了,当 X,Y 是度量空间的闭 s-像时,$X\times Y$ 是 k 空间当且仅当(i)、(ii)、(iii)三者之一成立.)

证明 (3)⇒(1).由于 S_ω,S_{ω_1}没有一个是可度量的,因此(i)、(ii)均不满足.又 S_{ω_1}不可能被可数个局部紧的闭子集所覆盖,所以 $S_{\omega_1}\notin\mathfrak{X}'$.由(3)可知 $S_\kappa\times S_{\omega_1}$不是 k 空间.

(1)⇔(2).已在 2.8.3 证明.

(1)⇒(3).(3)中的充分性部分已经证明,现只需证明必要性部分.假设 X,Y 是 Lasnev 空间,并且 $X\times Y$ 是 k 空间.当 X,Y 是度量空间的闭 s-像时,Tanaka[1976]已经证明了(i)、(ii)、(iii)之一成立.现在假设 X 不是度量空间的闭 s-像,这时一定存在 $x\in X$,使$\partial f^{-1}(x)$不是可分的(否则,记 $M^*=\bigcup\{\partial f^{-1}(x):x\in X\}$,则 f 限制在度量空间 M^* 时是 M^* 到 X 的闭 s-映射).由引理 2.8.6,X 有 S_{ω_1}的闭拷贝,由(1)可知,Y 不能含有 S_ω 的闭拷贝,Y 是 Lasnev 空间,再由 2.8.6 可知,若 Y 是度量空间 M 在闭映射 g 之下的像,则每个 $\partial g^{-1}(y)$必须是紧的.由 Hanai-Morita-Stone 定理(Engelking[1970]4.4.17),Y 是可度量的.假若 Y 不是局部紧的,则存在 $y\in Y$ 的 y 的下降可数局部基$\{U_n:n\in\mathbf{N}\}$,使得 $\overline{U}_n$ 不是紧的.归纳地选 $D_n=\{y_{nk}:k\in\mathbf{N}\}$ 和 V_n,使得:(1) $D_n\subset V_n$ 是闭离

散集;(2) $D_1 \subset U_1, \overline{V}_{n+1} \subset U_{n+1} - D_n$. 容易看出,$\{y\} \cup \{y_{nk}: n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N}\}$是 S_ω 是闭拷贝. 这就得出矛盾,于是 Y 满足条件(ⅱ). □

Gruenbage 的上述结果后来被一些人推广,获得了丰富的成果,得出了一大批与¬ BF(ω_2)等价的命题.

Tanaka[1982]证明了定理 2.8.8.

2.8.8 定理 (1) BF(κ^+)成立当且仅当 $I_\omega \times I_\kappa$ 是 *CW*-复形.

(2) 下述命题等价:

① ¬ BF(ω_2).

②) 设 K, L 是 *CW*-复形,则 $K \times L$ 是 *CW*-复形当且仅当下列条件之一满足:

(ⅰ) K 或 L 之一是局部有限的.

(ⅱ) K 和 L 都是局部可数的. □

CW-复形是 Lasnev 空间的一种特殊情况. 可以想像 *CW*-复形的乘积保持性与乘积的 k-性会有密切关系. Tanaka[1981]果然证明了定理 2.8.9.

2.8.9 定理 两个 *CW*-复形的乘积是 *CW*-复形的充要条件是该乘积是 k-空间. □

这样,定理 2.8.8 实际上可以看做是定理 2.8.7 与定理 2.8.9 的推论.

Tanaka 与 Zhou Haoxuan[1984]中,运用 *CW*-复形的闭像的乘积刻画了与¬ BF(ω_2)等价的命题.

2.8.10 定理 下列命题等价:

(1) ¬ BF(ω_2).

(2) 设 X, Y 是 *CW*-复形在闭映射下的像,则 $X \times Y$ 是 k 空间当仅仅当下列条件之一满足:

(ⅰ) X 或 Y 之一是局部紧的.

(ⅱ) X 和 Y 都是局部 k_ω 空间. □

比 Lasnev 空间更广的一类广义度量空间是具有 σ-遗传保闭包 k-网的空间.(Foged[1985]证明了 X 是 Lasnev 空间当且仅当 X 是 Frechet 空间并且有 σ-遗传保闭包的 k-网.)在戴牧民与刘川[1993]中,我们

讨论了具有 σ-遗传保闭包 k-网的 k 空间的乘积的 k 保持性问题.

为了简单起见,"遗传保闭包"一词今后将缩写成 HCP.

2.8.11　定理　下述命题等价:

(1) $\neg$ BF(ω_2).

(2) 设 X,Y 是有 σ-HCP k-网的 k 空间,则 $X\times Y$ 是 k 空间当且仅当下列条件之一满足:

(i) X,Y 都是可度量的.

(ii) X 或 Y 之一是局部紧可度量的.

(iii) X,Y 都是 $\aleph$ 空间并且属于类 $\mathfrak{T}'$.

(3) 设 $\{X_n:n\in\mathbf{N}\}$ 是一族有 σ-HCP k-网的 k-空间,则 $\prod_n X_n$ 是 k-空间当且仅当下列条件之一满足:

(i) X_n 都是可度量的.

(ii) 存在有限集 $J\subset\mathbf{N}$,使得对所有 $n\in\mathbf{N}-J$,X_n 是紧度量空间.而当 $n\in J$ 时,除了某一个 $n_0\in J$ 外,其余 X_n 是局部紧可度量空间.

(iii) 存在有限集 $J\subset\mathbf{N}$,使得对所有 $n\in\mathbf{N}-J$,X_n 是紧度量空间.而当 $n\in J$ 时,X_n 是 $\aleph$ 空间并且属于类 $\mathfrak{T}'$. □

刘川、Tanaka 和林寿等作了进一步的拓广,他们考虑了下列空间类:

(A) 有点可数 k-网的 Frechet 空间.

(B) 有紧可数 k-网并满足点 G_δ 性质(即 $\psi(X)=\omega$)的 k 空间.

(C) 有星可数闭 k-网的 k 空间.

他们得到了定理 2.8.12.

2.8.12　定理　下列命题等价:

(1) $\neg$ BF(ω_2).

(2) 设 X,Y 是前面所述(A)、(B)、(C)中的某类空间,则 $X\times Y$ 是 k-空间当且仅当下列条件之一满足:

(i) X 和 Y 都有点可数基.

(ii) X 或 Y 之一是局部紧空间.

(iii) X 和 Y 都是局部 k_ω 空间.

(刘川、林寿[1997a],刘川、Tanaka[1998]) □

注:X 称为 k_ω 空间,如果 X 被可数个紧子集构成的覆盖所控制. X 是局部 k_ω 空间,如果每个点 x 都有个邻域,其闭包是一个 k_ω 空间.

对于 k 和 $\aleph$ 空间乘积的 k 性, Tanaka[1983]曾证明,若 X, Y 是 k-$\aleph$-空间,则 $X\times Y$ 是 k 空间当且仅当满足下列三个条件之一:

(i) X, Y 都是第一可数的.

(ii) X 或 Y 之一是局部紧的.

(iii) X 和 Y 都是局部 k_ω 空间.

他并且猜测,如果将 k-$\aleph$-空间换成度量空间的商 s-像,命题也将成立. 但林寿、刘川[1996]却得出定理 2.8.13 的结论.

2.8.13 定理 BF(ω_2)⇒Tanaka 猜测不成立. □

另外, Burke, Davis[1984]也用另一种拓扑方式给出了 BF(κ)的等价刻画. 他们证明了定理 2.8.14.

2.8.14 定理 设 $\kappa < c$,则下列命题是等价的:

(1) BF(κ).

(2) 设 D 是正则空间 X 中的一个条件紧的子集. 对每个 $n\in\omega$,设 x_n 是 D 中某个序列的极限,又设 $x_n\to x$. 若 $\psi(x,X)<\kappa$,则 x 是 D 中某个序列的极限.

证明 (1) 设 BF(κ)成立. 由 $\psi(x,X)<\kappa$ 及 X 的正则性,存在 $\eta<\kappa$ 和 x 的开邻域族 $\{U_\alpha:\alpha<\eta\}$,使得 $\{x\}=\bigcap\{\overline{U}_\alpha:\alpha<\eta\}$. 设 $\{x_{nk}:k\in\mathbf{N}\}\subset D$ 是收敛于 x_n 的序列. 对每个 $\alpha<\eta$,取函数 $f_\alpha\in{}^\omega\omega$ 如下:

$$f_\alpha(n)=\begin{cases}0, & 若\ x_n\notin U_\alpha,\\ \max\{i:x_{ni}\notin U_\alpha\}+1, & 若\ x_n\in U_\alpha.\end{cases}$$

应用 BF(κ),存在 $g\in{}^\omega\omega$,使得对任何 $\alpha<\eta$,有 $f_\alpha<^* g$.

令 $S=\{x_{ng(n)}:n\in\omega\}$. 它是 D 中的一个序列. 我们来证明 S 收敛于 x. 设 $\alpha<\eta$. 由 $f_\alpha<^* g$ 知,从某个 n 开始有 $f_\alpha(n)<g(n)$. 这样就有 $x_{ng(n)}\in\overline{U}_\alpha$,即 S 终于 $\overline{U}_\alpha$ 内. 因此 S 的每个丛点都位于 $\overline{U}_\alpha$ 内. 由于 D 是条件紧的, S 一定有丛点 p, $p\in\bigcap\{\overline{U}_\alpha:\alpha<\eta\}=\{x\}$. 所以 S 有唯一丛点 x,即 S 收敛于 x.

(2) 假设 BF(κ)不成立. 这样 $b=\min\{|B|:B\in{}^{\omega}\omega$ 是无界集$\}<\kappa$.

任取一个势为 b 的无界集$\{g_\xi:\xi<b\}$. 用归纳方式可以作出一个无界的函数序列$\{f_\xi:\xi<b\}$, 使之满足 $\xi<\eta\Rightarrow f_\xi<^* f_\eta$. 作法如下: $\xi=0$ 时, 任取 f_0 使 $f_0>^* g_0$. 对 $\alpha<b$, 假定$\{f_\xi:\xi<\alpha\}$已经作出. 因为$\{f_\xi:\xi<\alpha\}\cup\{g_\xi:\xi<\alpha\}$的势 $<b$, 它一定有界. 于是可找到 $f_\alpha\in{}^{\omega}\omega$, 使 $f_\alpha>^* f_\xi, f_\alpha>^* g_\xi$ 对所有 $\xi<\alpha$ 成立. 这就完成了归纳. 由$\{g_\alpha:\alpha<b\}$的无界性可知$\{f_\alpha:\alpha<b\}$也是无界的.

设 $X=[0,b)\cup(\omega\times\omega)$, 这里$[0,b)$表示所有 $<b$ 的序数. 规定 X 的一个拓扑如下:

(1) $\omega\times\omega$ 中的点都是孤立点.

(2) 当 $\alpha\in(0,b)$时, 对每个 $\eta<\alpha$ 和 $m<\omega$, 定义 $U(\alpha,\eta,m)=(\eta,\alpha]\cup\{(k,n):k\geqslant m, f_\eta(k)<n\leqslant f_\alpha(k)\}$, 并取$\{U(\alpha,\eta,m):\eta<\alpha, m<\omega\}$作为点 α 的邻域基.

(3) 当 $\alpha=0$ 时, 对任意 $m<\omega$, 定义

$$U(0,m)=\{0\}\cup\{(k,n):k\geqslant m, n\leqslant f_0(k)\},$$

并取$\{U(0,m):m<\omega\}$作为点 0 的邻域基.

另取一个不属于 X 的点序列$\{x_n:n<\omega\}$. 对每个 n, 记 $A_n=\{n\}\times\omega$. 令 $Y=X\cup\{x_n:n<\omega\}$. 取$\{\{x_n\}\cup(A_n-\{n\}\times m):m<\omega\}$作为点 x_n 的邻域基.

这样可以构造出 Y 的一个拓扑. 现在来证明 Y 是一个局部紧 T_2 空间.

$\alpha=0$ 时, 若 $m_1<m_2$, 则 $U(0,m_1)-U(0,m_2)=\{(k,n):m_1\leqslant k<m_2, n\leqslant f_0(k)\}$是有限集. 所以 $U(0,m)$是紧邻域.

$\alpha>0$ 时, 若 $\eta_1<\eta_2<\alpha, m_1<m_2$, 则 $U(\alpha,\eta_1,m_1)-U(\alpha,\eta_2,m_2)=(\eta_1,\eta_2]\cup\{(k,n):m_1\leqslant k<m_2, f_{\eta_1}(k)<n\leqslant f_{\eta_2}(k)\}$. $(\eta_1,\eta_2]$从序数的序关系看是紧的, 而第二部分是有限集, 所以 $U(\alpha,\eta,m)$也是紧邻域.

对 x_n, 显然$\{x_n\}\cup(A_n-\{n\}\times m)$是紧邻域.

现在我们来证明 $D=\omega\times\omega$ 是 Y 的一个条件紧子集. 设 S 是 D 中

的一个序列.若存在 n 使 $A_n\cap S$ 是无限集,则 x_n 就是 S 的一个丛点.若对每个 n, $A_n\cap S$ 是有限集,对每个 ξ,记 $G_\xi=\{(m,n):n\leqslant f_\xi(m)\}$,这时一定有 ξ,使 $S\cap G_\xi$ 是无限集.又记 $\alpha=\inf\{\xi:S\cap G_\xi$ 是无限的$\}$,这时若 $\alpha=0$,则易见 0 是 S 的丛点;若 $\alpha>0$,则 $\forall\eta<\alpha$, $G_\eta\cap S$ 有限.从而任何一个 $U(\alpha,\eta,m)$ 与 S 都相交.于是 α 是 S 的丛点.

设 $\alpha(Y)=Y\cup\{p\}$ 是 Y 的单点紧化,注意 $|\alpha(Y)|=b$,所以 $\psi(p,\alpha(Y))<b$.由于 $\{x_n:n<\omega\}$ 是 Y 中的闭离散集, $\alpha(Y)$ 是紧空间,因此 $\{x_n:n<\omega\}$ 收敛于 p.每个 x_n 都是 $\omega\times\omega$ 中一个序列的极限.然而经上述论证, $D=\omega\times\omega$ 中任何一个序列都不可能收敛于 p. □

利用上述结论,Burke 和 Davis 证明了下述定理.

2.8.15 定理(BF(κ)) 若 X 是一个序列空间, $\chi(X)<\kappa$,则 X 是 Frechet 空间. □

2.8.16 定理(BF(κ)) 每个正则的 feebly 紧的对称空间 X,若 X 有一个稠密子集,它的每个点 x 都有 $\chi(x,X)=\omega$,则 X 是第一可数的(X 称为 feebly 紧的,如果 X 的任何离散开集族都只包含有限个开集.就完全正则空间而言,feebly 紧与伪紧是同义的). □

2.8.17 定理(BF(c)) 正则对称空间若有一个稠密的条件紧子集,则此空间是第一可数的. □

§9 S-序和 Szentmiklosy 引理

这一节我们介绍 S-序的概念并展开一些讨论.其取材主要是参考 Fremlin 的书[1984]. S-序及其研究是 Fremlin 将拓扑学家们运用 Martin 公理研讨拓扑问题时构造半序的好几种方法概括、提炼出来的.在 §10 中我们将回过头来运用本节的结果推出一些重要的拓扑结论.

2.9.1 定义 设 X,Y 是两个非空集, $S\subset X\times Y$,记 $\boldsymbol{P}=[X]^{<\omega}\times[Y]^{<\omega}$,规定 $\boldsymbol{P}$ 中一个半序如下:

$$(I,J)\geqslant(K,L)\Leftrightarrow(I\subset K)\wedge(J\subset L)\wedge(S(I)\cap L\subset J),$$

其中 $S(I)=\bigcup\{S(x):x\in I\}$ 表示 S 的 I 截口.

容易验证, $\leqslant$ 确实是一个半序关系.由于这个半序是与 S 密切相

关的,所以称它为关于 S 的半序,简称 S-序. □

2.9.2 引理 设 $(\boldsymbol{P}, \leqslant)$ 是一个 S-序.

(1) $\forall x \in X, Q_x = \{(I, J) \in \boldsymbol{P}: x \in I\}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的稠密集.

(2) 若 $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{P}$ 是一个交联子集. 令

$$W = \bigcup \{J: (I, J) \in \boldsymbol{R}\},$$

则对任一 $(I, J) \in \boldsymbol{R}$,有 $W \cap S(I) \subset J$.

(3) 若 $S(X)$ 是可数集,则 $\boldsymbol{P}$ 是 σ-定心的.

证明 (1) $\forall (I, J) \in \boldsymbol{P}$,有 $(I \cup \{x\}, J) \in Q_x$,并且 $(I, J) \geqslant (I \cup \{x\}, J)$,所以 Q_x 是稠密集.

(2) 设 $y \in W \cap S(I)$,则 $\exists (I', J') \in \boldsymbol{R}$,使 $y \in J'$. 又由交联条件,存在 (K, L),使得 $(I, J) \geqslant (K, L)$, $(I', J') \geqslant (K, L)$. 因为 $y \in J' \subset L$,所以 $y \in L \cap S(I) \subset J$.

(3) 若 $|S(X)| = \omega$,则 $|[S(X)]^{<\omega}| = \omega$. 对每个 $K \in [S(X)]^{<\omega}$,记 $C_K = \{(I, J) \in \boldsymbol{P}: J \cap S(X) = K\}$. 若 $(I_1, J_1), \cdots, (I_n, J_n) \in C_K$,则 $(I_1 \cup \cdots \cup I_n, J_1 \cup \cdots \cup J_n)$ 是它们的下界. 所以 C_K 是定心的. 于是 $\boldsymbol{P} = \bigcup \{C_K: K \in [S(X)]^{<\omega}\}$ 是 σ-定心的. □

2.9.3 定理 设 $(\boldsymbol{P}, \leqslant)$ 是 S-序.

(1) 若 $\boldsymbol{P}$ 是 CCC,则 $\forall x \in X, S(x)$ 是可数的.

(2) 若 $\forall x, S(x)$ 是可数的,则对任一 ω_1 序列 $\{(I_\xi, J_\xi): \xi < \omega_1\}$,存在不可数集 $A \subset \omega_1$,使 $\{I_\xi: \xi \in A\}$, $\{J_\xi: \xi \in A\}$ 都是 Δ 系统,并且当 $\xi \in A, \eta \in A, \eta < \xi$ 时,有 $(I_\eta, J_\eta) \geqslant (I_\eta \cup I_\xi, J_\eta \cup J_\xi)$.

证明 (1) 对任一 x, $\{(\{x\}, \{y\}): (x, y) \in S\}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的一个反链. 若 $\boldsymbol{P}$ 是 CCC 半序,则它是可数的. 因而 $S(x)$ 是可数的.

(2) 由 Δ 系统引理,存在不可数集 $C \subset \omega_1$,使 $\{I_\xi: \xi \in C\}$ 和 $\{J_\xi: \xi \in C\}$ 构成 Δ 系统. 设它们的根分别为 I 和 J. 我们用归纳法来构造所要求的 A. 设 $A_\alpha \subset C$ 是一个序型为 α 的子集, A_α 能满足命题所述的要求. 由于 $|A_\alpha| \leqslant \omega$,可知 $M = \bigcup \{S(I_\xi): \xi \in A_\alpha\}$ 是可数集. 注意 $\{J_\xi - J: \xi \in C\}$ 是互斥族, $\{\xi: M \cap (J_\xi - J) \neq \varnothing\}$ 也是可数的. 于是存在最小的 ξ_α,使 $\xi_\alpha \in C$, ξ_α 大于 A_α 中所有的数,并且 $M \cap (J_{\xi_\alpha} - J) = \varnothing$. 令 $A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{\xi_\alpha\}$. 这时若 $\eta \in A_\alpha$,则 $\eta < \xi_\alpha$. 为比较 (I_η, J_η) 与 $(I_\eta \cup I_{\xi_\alpha}, J_\eta \cup J_{\xi_\alpha})$,只

需验证 $S(I_\eta)\cap(J_\eta\cup J_{\xi_\alpha})\subset J_\eta$ 即可.注意 $S(I_\eta)\cap(J_\eta\cup J_{\xi_\alpha})\subset S(I_\eta)\cap[J_\eta\cup(J_{\xi_\alpha}-J)]$,$S(I_\eta)\cap J_\eta\subset J_\eta$,所以$(I_\eta\cup I_{\xi_\alpha},J_\eta\cup J_{\xi_\alpha})\leqslant(I_\eta,J_\eta)$.现在令 $A=\bigcup\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$,则 A 即为所求. □

为了证明定理 2.9.5 和 2.9.6,我们先给出一个引理.

2.9.4 引理(MA κ) 设$(P,\leqslant)$是一个 CCC 半序,$\{Q_\alpha:\alpha<\kappa\}$是一族稠密集,$A\in[P]^{\leqslant\kappa}$,则存在$P$的子集列$\{P_i:i<\omega\}$,每个 P_i 是定向的,$A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}P_i$,并且 $\forall\alpha<\kappa$,$P_i\cap Q_\alpha\neq\varnothing$.

证明 设 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}P^n$.对 $f,g\in X$,定义 $f\leqslant g$ 当且仅当 $\mathrm{dom}\, g\subset\mathrm{dom}\, f$,并且 $\forall i\in\mathrm{dom}\, g$,有 $f(i)\leqslant g(i)$.

现在证明$(X,\leqslant)$是一个 CCC 半序.假设 $Y\subset X$ 是不可数集.此时存在 n,使$|\{f\in Y:\mathrm{dom}\, f=n+1\}|>\omega$.由引理 2.1.11,$P^n$ 关于乘积序仍是 CCC 半序.这样,必存在 $f,g\in Y\cap P^n$,使 f,g 是相容的.所以 X 满足 CCC.

$\forall m<\omega,\alpha<\kappa$,令

$$D_{m\alpha}=\{f\in X:\mathrm{dom}\, f\supset m+1,f(m)\in Q_\alpha\}.$$

对任意 $g\in X$,若 $\mathrm{dom}\, g=k+1$,而 $k<m$,任取 $q\in Q_\alpha$,定义

$$f(i)=\begin{cases}g(i), & i\leqslant k,\\ q, & k<i\leqslant m,\end{cases}$$

则$f\in D_{m\alpha}$,$f\leqslant g$.若 $\mathrm{dom}\, g\supset m+1$,由 Q_α 的稠密性,取 $q_\alpha\in Q_\alpha$,使 $q_\alpha\leqslant g(m)$,定义

$$f(i)=\begin{cases}g(i), & i\neq m,\\ q_\alpha, & i=m,\end{cases}$$

则 $f\in D_{m\alpha}$,$f\leqslant g$.所以$\{D_{m\alpha}:m<\omega,\alpha<\kappa\}$是 X 的稠密集族.

$\forall p\in A,m<\omega$,令

$$D_{mp}=\{f\in X:\exists\, i\in\mathrm{dom}\, f-m,使 f(i)=p\}.$$

$\forall g\in X$,定义 f 使 $\mathrm{dom}\, f-(\mathrm{dom}\, g\cup m)\neq\varnothing$,并且

$$f(i)=\begin{cases}g(i), & i\in\mathrm{dom}\, g,\\ p, & i\in\mathrm{dom}\, f-\mathrm{dom}\, g,\end{cases}$$

则 $f \in D_{mp}, f \leqslant g$. 所以 $\{D_{mp}: m < \omega, p \in A\}$ 也是 X 的稠密集族.

上述两个稠密集族的势都不超过 κ. 于是存在一个滤子 G, G 与每个 $D_{m\alpha}$, 每个 D_{mp} 相交.

令 $P_i = \{p \in \boldsymbol{P}: \exists f \in G, 使\ i+1 \subset \mathrm{dom}\, f, f(i) \leqslant p\}$.

(1) P_i 是定向的. 设 $p, q \in P_i$, 则存在 $f, g \in G$, 使 $i+1 \subset \mathrm{dom}\, f$ 和 $\mathrm{dom}\, g$, $f(i) \leqslant p$, $g(i) \leqslant p$. 由于 G 是滤子, 存在 $h \in G$, $h \leqslant f$, $h \leqslant g$, 于是 $h(i) \leqslant f(i) \leqslant p$, $h(i) \leqslant g(i) \leqslant q$. 依 P_i 的定义, $r = h(i) \in P_i$. 证明了 P_i 是定向的.

(2) $\forall \alpha < \kappa$, 设 $f \in D_{i\alpha} \cap G$, 则由定义有 $i+1 \subset \mathrm{dom}\, f$, 并且 $f(i) \in Q_\alpha$. 于是 $f(i) \in P_i$. 证明了 $P_i \cap Q_\alpha \neq \varnothing$.

(3) $\forall p \in A$, 设 $f \in D_{mp} \cap G$, 则由定义, 存在 $i \in \mathrm{dom}\, f - m$, 使 $f(i) = p$. 于是 $p \in f(i) \in P_i$. 证明了 $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$. □

2.9.5 定理(MA κ) 设 X, Y 为不空的集, $S \subset X \times Y$, $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(Y)$, $Z \subset Y$, $f: Z \to X$ 是一个函数. 又设 $\leqslant$ 是 $\boldsymbol{P} = [X]^{<\omega} \times [Y]^{<\omega}$ 的 S 序, 满足:

(1) $(\boldsymbol{P}, \leqslant)$ 是 CCC PO.

(2) $\forall B \in \mathscr{B}, I \in [X]^{<\omega}$, 有 $B - S(I) \neq \varnothing$.

(3) $|X| \leqslant \kappa$, $|\mathscr{B}| \leqslant \kappa$, $|Z| \leqslant \kappa$.

则存在 $\{Y_n: n < \omega\}$, $\{Z_n: n < \omega\}$, 使得

(1) $Y = \bigcup_n Y_n$. $\forall x \in X, n < \omega$, $Y_n \cap S(x)$ 是有限的; $\forall B \in \mathscr{B}, n < \omega$, 有 $Y_n \cap B \neq \varnothing$.

(2) $Z = \bigcup_n Z_n$. $\forall x \in X, n < \omega$, $Z_n \cap S(x)$ 是有限的; $\forall n$, 当 $z, w \in Z_n$, $z \neq w$ 时, $(f(z), w) \notin S$.

证明 $\forall x \in X$, 令

$$Q_x = \{(I, J) \in \boldsymbol{P}: x \in I\}.$$

由引理 2.9.2, 它是稠密的. $\forall B \in \mathscr{B}$, 令

$$Q_B = \{(I, J) \in \boldsymbol{P}: J \cap B \neq \varnothing\}.$$

设 $(I, J) \in \boldsymbol{P}$. 由条件(2), 存在 $y \in B - S(I)$. 于是 $(I, J \cup \{y\}) \leqslant (I, J)$. 而 $(I, J \cup \{y\}) \in Q_B$, 所以 Q_B 也是稠密的.

由引理 2.9.4,存在由定向集构成的序列$\{P_n : n < \omega\}$,使得

$$\{(\varnothing, \{y\}) : y \in S(x)\} \cup \{(f(z), \{z\}) : z \in Z\} \subset \bigcup_n P_n,$$

并且 P_n 与每个 Q_x, Q_B 都相交.令

$$W_n = \bigcup \{J : (I, J) \in P_n\},$$

$$Y_n = W_n \cup (Y - S(x)),$$

$$Z_n = \{z \in Z : (f(z), \{z\}) \in P_n\},$$

则 $S(X) \subset \bigcup_n W_n$, $\bigcup Y_n = Y$, $\bigcup_n Z_n = Z$,而 $Z_n \subset W_n \subset Y_n$ 对所有 n 都成立.

对每个 n 和 $x \in X$,存在$(I, J) \in Q_x \cap P_n$.这时由引理 2.9.2(2),得

$$Z_n \cap S(x) \subset Y_n \cap S(x) = W_n \cap S(x) \subset W_n \cap S(I) \subset J.$$

所以 $Z_n \cap S(x)$和 $Y_n \cap S(x)$都是有限集.若 $B \in \mathscr{B}$, $n < \omega$,则存在$(I, J) \in Q_B \cap P_n$.于是

$$Y_n \cap B \supset W_n \cap B \supset J \cap B \neq \varnothing.$$

若 $z \in Z_n$,则

$$Z_n \cap S(f(z)) \subset W \cap S(f(z)) \subset \{z\}.$$

由引理 2.9.2(2),对每个 $w \in Z_n - \{z\}$,有

$$(f(z), w) \notin S. \qquad \square$$

2.9.6 定理(Szentmiklosy 引理) 设 X, Y 是非空集,$S \subset X \times Y$,使得$\forall x \in X$, $S(x)$是可数集,$\boldsymbol{P} = [X]^{<\omega} \times [Y]^{<\omega}$,$\leqslant$是$\boldsymbol{P}$的 S-序.若$(\boldsymbol{P}, \leqslant)$不是 CCC PO,则存在$\{K_\xi : \xi < \omega_1\}$和$\{L_\xi : \xi < \omega_1\}$,使得:

(1) $\{K_\xi : \xi < \omega_1\} \subset [X]^{<\omega}$, $\{L_\xi : \xi < \omega_1\} \subset [Y]^{<\omega}$都是互斥族,各有相同的大小,并且$\forall \eta < \xi < \omega_1$,有 $L_\eta \cap S(K_\xi) \neq \varnothing$.

(2) 对每个不可数的 $C \subset \bigcup \{L_\xi : \xi < \omega_1\}$,存在可数的 $D \subset C$ 和$\alpha < \omega_1$,使得对任何有限集 $M \subset [\alpha, \omega_1)$, $D \cap (\bigcap \{S(K_\xi) : \xi \in M\})$是无限的.

(3) 对任何不可数的 $C \subset \bigcup \{K_\xi : \xi < \omega_1\}$,集$\{\xi : L_\xi \cap S(C) = \varnothing\}$是可数的.

证明 (Ⅰ) 对 $i, j < \omega$,令

$\mathscr{H}_{ij} = \{\{(K_\xi, L_\xi) : \xi < \omega_1\} : \{K_\xi : \xi < \omega_1\}, \{L_\xi : \xi < \omega_1\}$满足(1),并且

$|K_\xi| = i, |L_\xi| = j$,对所有 $\xi < \omega_1$ 成立.}
我们来证明存在 i, j 使 $\mathscr{H}_{ij} \neq \varnothing$.

因为$(P, \leqslant)$不是 CCC 的,故存在不可数的反链$\{(I_\xi, J_\xi): \xi < \omega_1\}$. 由定理 2.9.3(2),存在不可数的 $A \subset \omega_1$,使$\{I_\xi: \xi \in A\}$,$\{J_\xi: \xi \in A\}$是具有固定大小的 Δ 系统,并且当 $\xi \in A, \eta \in \xi \cap A$ 时,有$(I_\eta, J_\eta) \geqslant (I_\eta \cup I_\xi, J_\eta \cup J_\xi)$. 于是由反链的含义,$(I_\eta \cup I_\xi, J_\eta \cup J_\xi) \leqslant (I_\xi, J_\xi)$不能成立,即当 $\xi \in A, \eta \in \xi \cap A$ 时,

$$S(I_\xi) \cap (J_\eta - J_\xi) \neq \varnothing.$$

另一方面,记 $\zeta = \min A, I = I_\zeta, J = J_\zeta$,则对每个 $\eta \in A - \{\zeta\}$,有 $\zeta \in A \cap \eta$. 由$(I \cup I_\eta, J \cup J_\eta) \leqslant (I, J)$,有 $S(I) \cap (J \cup J_\eta) \subset J$,即 $S(I) \cap (J_\eta - J) = \varnothing$.

设$\{\alpha(\xi): \xi < \omega_1\}$是 $A - \{\zeta\}$的递增排列,就有

$$\{(I_{\alpha(\xi)} - I, J_{\alpha(\xi)} - J): \xi < \omega_1\} \in \mathscr{H}_{ij},$$

这里 $i = |I_{\alpha(\xi)} - I|, j = |J_{\alpha(\xi)} - J|$(注意,对所有 ξ, $|I_{\alpha(\xi)} - I|$, $|J_{\alpha(\xi)} - J|$都是常数).

设 $n = \min\{j: \bigcup_k \mathscr{H}_{kj} \neq \varnothing\}, m = \min\{k: \mathscr{H}_{kn} \neq \varnothing\}$,并取$\{(K_\xi, L_\xi): \xi < \omega_1\} \in \mathscr{H}_{mn}$,则所得的$\{K_\xi: \xi < \omega_1\}$和$\{L_\xi: \xi < \omega_1\}$就满足定理中(1)的要求.

(Ⅱ) 设 $C \subset \bigcup\{L_\xi: \xi < \omega_1\}$. 我们先证明存在可数子集 $D \subset C$ 和 $\alpha < \omega_1$,使$\{D \cap S(K_\xi): \alpha \leqslant \xi < \omega_1\}$有 fip. 如若不然,因为每个 L_ξ 是有限的,所以对每个 $\alpha < \omega_1$, C 与$\bigcup\{L_\xi: \xi \geqslant \alpha\}$都相交. 归纳地选择 $\alpha(\xi)$和有限集 $M(\xi) \subset [\alpha(\xi), \omega_1)$,使

(a) $\forall \eta < \xi, \alpha(\eta) < \alpha(\xi)$.

(b) $\forall \eta < \xi, \alpha(\xi) > \max M(\eta), C \cap L_{\alpha(\xi)} \neq \varnothing$.

(c) $[C \cap (\bigcup\{L_{\alpha(\eta)}: \eta < \xi\})] \cap [\bigcap\{S(K_\zeta): \zeta \in M(\xi)\}] = \varnothing$.

只要注意 $A = C \cap (\bigcup\{L_{\alpha(\eta)}: \eta < \xi\})$是可数集,由假设$\{A \cap S(K_\xi): \alpha \leqslant \xi < \omega_1\}$对任何 α 都没有 fip,所以一定存在满足(c)的有限集 $M(\xi)$,归纳是可以完成的.

现在选取 $y_\xi \in C \cap L_{\alpha(\xi)}$. 令

$$L'_\xi = L_{\alpha(\xi)} - \{y_\xi\}, K'_\xi = \bigcup\{K_\zeta : \zeta \in M(\xi)\}.$$

因为 $\alpha(\xi)$严格递增,$\{L'_\xi : \xi < \omega_1\}$是互不相交的,又因为当 $\eta < \xi$ 时,

$$\min M(\xi) \geqslant \alpha(\xi) > \max M(\eta),$$

所以$\{M(\xi) : \xi < \omega_1\}$也互不相交.从而$\{K'_\xi : \xi < \omega_1\}$互不相交.若 $\eta < \xi < \omega_1$,则 $y_\eta \in C \cap L_{\alpha(\eta)}$.于是存在 $\zeta \in M(\xi)$,使 $y_\eta \overline{\in} S(K_\zeta)$.但是$\alpha(\eta) < \min M(\xi) \leqslant \zeta$,由于(1)已得证,存在 $y \in L_{\alpha(\eta)} \cap S(K_\zeta)$,这样的 y 与 y_η 是不同的,因此 $y \in L'_\eta \cap S(K_\zeta) \subset L'_\eta \cap S(K'_\xi)$,亦即 $\eta < \xi$ 时有$L'_\eta \cap S(K'_\xi) \neq \varnothing$.设 $k < \omega$ 使$B = \{\xi : |K'_\xi| = k\}$是不可数的,并将 B 的元按升序排列成 $B = \{\beta(\xi) : \xi < \omega_1\}$,则$\{(K'_{\beta(\xi)}, L'_{\beta(\xi)}) : \xi < \omega_1\} \in \mathscr{H}_{k,n-1}$.这就和 n 的定义发生矛盾.

现在我们来证明(2).

设 $C \subset \bigcup\{L_\xi : \xi < \omega_1\}$是不可数的.由以上所证,对每个 k 可以归纳地选出可数集D_k 和$\alpha(k) < \omega_1$,使得 $D_k \subset C - \bigcup\{D_j : j < k\}$是可数的,并且$\{D_k \cap S(K_\xi) : \alpha(k) \leqslant \xi < \omega_1\}$有 fip.

现在令 $D = \bigcup_k D_k$, $\alpha = \operatorname{Sup}_k \alpha_k$,则对任意的有限集 $M \subset [\alpha, \omega_1)$和任何的 k,

$$D_k \cap (\bigcup\{S(K_\xi) : \xi \in M\}) \neq \varnothing.$$

于是 $D \cap (\bigcap\{S(K_\xi) : \xi \in M\})$是无限集.

(Ⅲ) 假若(3)不成立,则存在不可数集 $C \subset \bigcup\{K_\xi : \xi < \omega_1\}$,使得 $D = \{\xi : L_\xi \cap S(C) = \varnothing\}$是不可数集.归纳地取 $\gamma(\xi), \delta(\xi)$,使 $\eta < \xi$ 时有$\gamma(\xi) > \delta(\eta)$, $C \cap K_{\gamma(\xi)} \neq \varnothing$.再选 $\delta(\xi) \geqslant \gamma(\xi)$, $\delta(\xi) \in D$.

现在,$\forall \xi < \omega_1$,取 $x_\xi \in C \cap K_{\gamma(\xi)}$.令

$$K'_\xi = K_{\gamma(\xi)} - \{x_\xi\}, L'_\xi = L_{\delta(\xi)}.$$

由于$\{\gamma(\xi) : \xi < \omega_1\}$和$\{\delta(\xi) : \xi < \omega_1\}$是严格递增的,因此$\{K'_\xi : \xi < \omega_1\}$和$\{L'_\xi : \xi < \omega_1\}$都是互斥族.当 $\eta < \xi$ 时有$\delta(\eta) < \gamma(\xi)$,因此存在 $y \in L_{\delta(\eta)} \cap S(K_{\gamma(\xi)})$.注意 $\delta(\eta) \in D$,由 D 的定义,$y \overline{\in} S(C)$.于是 $y \in S(K_{\gamma(\xi)} - C) \subset S(K'_\xi)$,亦即 $L'_\eta \cap S(K'_\xi) \neq \varnothing$.这表明$\{(K'_\xi, L'_\xi) : \xi < \omega_1\} \in \mathscr{H}_{m-1,n}$.这与 m 的定义矛盾,于是(3)得证. □

§ 10 关于遗传 CCC 空间和全的,局部紧空间的几个结论

这一节,我们将运用 § 9 所介绍的关于 S-序及 Martin 公理的组合命题来讨论遗传 CCC 空间的性质以及局部紧空间与仿紧性之间的关系,其中包含 Szentmiklosy 关于在 MA + ┐ CH 下不存在第一可数 L 空间和不存在紧 S 空间的证明,Lane 关于 MA + ┐ CH⇒全正规局部紧、局部连通空间是仿紧的以及 Rudin 关于 MA ω_1⇒全正规流形是可度量的等结论.

2.10.1 定理(MA ω_1) 设 Z 是一个正则空间,$Y \subset Z$ 是遗传 CCC 不可分子空间,则存在不空的 $D \subset Y$,使得对每个 $z \in \overline{D}$, $\pi\chi(z, \overline{D}) > \omega$.

(这里的 $\pi\chi(z, S)$表示点 z 在空间 S 中的 π 特征数,$\pi\chi(z, S) = \omega \cdot \min\{|\mathscr{B}|: \mathscr{B}$是 S 中开集族,$\varnothing \notin \mathscr{B}$. $\forall z$ 的邻域 V, $\exists B \in \mathscr{B}, B \subset V\}$.)

证明 (1) 因为 Y 是不可分的,所以可取一个序列$\{x_\xi : \xi < \omega_1\} \subset Y$,使得对任何 ξ, $x_\xi \notin \{x_\eta : \eta < \xi\}^-$. 因为 Z 是正则空间,所以可取开集 $G_\xi \subset Z$,使 $x_\xi \in G_\xi$,而$\overline{G_\xi} \cap \{x_\eta : \eta < \xi\}^- = \varnothing$,令 $W = \{x_\xi : \xi < \omega_1\}$,则对任意可数的 $C \subset W$, $\overline{C} \cap W$ 仍是可数的. 而对不可数的 $E \subset W$,一定存在可数的 $D \subset E$,使得当 H 是 Z 中的开集,且 $H \cap D \neq \varnothing$时,$D \cap H$ 是不可数的. 不然的话,就会存在一个开集 H_0,使 $H_0 \cap E$ 是可数的. 这时,$(H_0 \cap E)^-$也是可数的. 按归纳方式我们可以对所有 $\eta < \omega_1$ 作出开集 H_η,使得$[E - (\bigcup\{E \cap H_\xi : \xi < \eta\})^-] \cap H_\eta$ 是可数的不空集. 对每个 ξ,选取 $w_\xi \in (H_\xi \cap E) - (\bigcup\{E \cap H_\eta : \eta < \xi\})^-$,则

$$\{w_\eta : \eta \neq \xi\}^- = \{w_\eta : \eta < \xi\}^- \cup \{w_\eta : \eta > \xi\}^-.$$

显然 $w_\xi \notin \{w_\eta : \eta < \xi\}$. 另一方面,$w_\xi \in H_\xi$. 若 $H_\xi \cap \{w_\eta : \eta > \xi\}^- \neq \varnothing$,则 $H_\xi \cap \{w_\eta : \eta > \xi\} \neq \varnothing$. 这样就存在 $\eta > \xi$,使 $w_\eta \in H_\xi \cap E$. 这与 w_η 的选法不符合,所以 $w_\eta \notin \{w_\eta : \eta > \xi\}^-$. 这就证明了$\{w_\xi : \xi < \omega_1\}$是 Y 的一个离散子空间,与关于 Y 的假设矛盾.

(2) 令 $S=\bigcup\{(G_\xi\cap W)\times\{\xi\}:\xi<\omega_1\}\subset W\times\omega_1$. 设$P=[W]^{<\omega}\times[\omega_1]^{<\omega}$,赋以 S-序,则$(P,\leqslant)$不是 CCC 的.不然的话,由定理 2.1.9,P 有 Precalibre ω_1,于是存在不可数的 $C\subset\omega_1$,使 $R=\{(\{x_\xi\},\{\xi\}):\xi\in C\}$在$P$中是定心的,由引理 2.9.2(2),注意$\bigcup\{\{\xi\}:\xi\in C\}=C$,对任何$(\{x_\xi\},\{\xi\})\in R$,有 $C\cap S(x_\xi)\subset\{\xi\}$. 于是当 $\eta\neq\xi,\eta,\xi\in C$ 时有$(x_\xi,\eta)\overline{\in} S$,即 $x_\xi\overline{\in} G_\eta$. 这表明$\{x_\xi:\xi\in C\}$是离散的,与 Y 的假设矛盾.

(3) 因为 S 的每个垂直截口 $S(x_\zeta)=\{\xi:x_\zeta\in W\cap G_\xi\}\subset\zeta+1$ 都是可数集,应用 Szentmiklosy 引理 2.9.6,存在互斥族$\{K_\xi:\xi<\omega_1\}\subset[W]^{<\omega}$和互斥族$\{L_\xi:\xi<\omega_1\}\subset[\omega_1]^{<\omega}$,使得对任一不可数的 $C\subset\bigcup\{K_\xi:\xi<\omega_1\}$,$\{\xi:L_\xi\cap S(C)\neq\varnothing\}$是可数的. 于是由(1),存在不可数集 $D\subset\bigcup\{K_\xi:\xi<\omega_1\}$,使得当 H 是 Z 中的与 D 相交的开集时,$D\cap H$ 是不可数的. 令 $V_\xi=\bigcup\{G_\alpha:\alpha\in L_\xi\}$,则对于 $C\subset W$,有 $C\cap V_\xi=\varnothing$当且仅当对所有的 $\alpha\in L_\xi$ 有 $C\cap G_\alpha=\varnothing$,当且仅当 $L_\xi\cap S(C)=\varnothing$. 这样,若 $H\subset Z$ 是开集而$H\cap D\neq\varnothing$,就有$\{\xi:D\cap H\cap V_\xi=\varnothing\}=\{\xi:L_\xi\cap S(D\cap H)=\varnothing\}$是可数的.

(4) 现在设 $z\in D^-$. 假若 $\pi\chi(z,\bar D)\leqslant\omega$,则存在 Z 中的开集序列$\{H_n:n<\omega\}$,使得$\forall n$,有 $H_n\cap\bar D\neq\varnothing$,并且 z 的任何一个邻域都包含某个$H_n\cap\bar D$. 这样就可以找到可数集 $C\subset D$,使 $z\in\bar C$. C 可数,于是存在 ξ 使$C\subset\{x_\eta:\eta<\xi\}$,因此$\{\xi:\bar G_\xi\cap\bar C=\varnothing\}$是可数集. 又因为$\{L_\xi:\xi<\omega_1\}$是互斥族,$\{\xi:\bar V_\xi\cap\bar C\neq\varnothing\}$也是可数的. 再由(3),对所有 n,$\{\xi:D\cap V_\xi\cap H_n\neq\varnothing\}$是可数的,所以存在 $\xi<\omega_1$,使 $\bar V_\xi\cap\bar C=\varnothing$,并且对所有的 n,$\bar D\cap\bar V_\xi\cap H_n\neq\varnothing$. 这是不可能的,因为 $z\in\bar C$,$Z\sim\bar V_\xi$ 是 z 的邻域,它应当包含某个 $\bar D\cap H_n$. 这个矛盾证明了 $\pi\chi(z,\bar D)>\omega$. □

作为上述定理的直接应用,我们可得出下面几个结论.

2.10.2 定理(MA ω_1) (1) 设 X 是正则,遗传 CCC 空间. 若 $\pi\chi(X)\leqslant\omega$,则 X 是遗传可分的(Szentmiklosy).

(2) 设 X 是全的,局部可数紧的遗传 CCC 空间,则 X 是遗传可分的.

(3) 设 X 是正则,遗传 CCC 空间. 若 X 可以嵌入一个遗传正规的

紧 T_2 空间，则 X 是遗传可分的.

证明 (1) 是定理2.10.1的直接推论.

(2) 由定理2.5.3 Weiss 的结论，X 是全的，局部紧 T_2 空间，于是 X 是第一可数的，$\chi(X)=\omega$. 再由(1)即可得出.

(3) 设 X 可以嵌入一个遗传正规的紧 T_2 空间 Z，若 X 不是可分的，则 Z 也不是可分的. 由定理2.10.1，存在 $D\subset Z$，使得对任何 $z\in\bar{D}$，$\pi\chi(z,\bar{D})>\omega$. 令 $Y=\bar{D}$，则 Y 是遗传正规，遗传 CCC 的紧 T_2 空间，并且 $\forall z\in\bar{D}, \pi(z,Y)>\omega$. 这时由 I. Juhasz[1980]中的3.20，存在 Y 到 $\{0,1\}^{\omega_1}$ 上的一个连续遍射 φ. 因为 Y 是紧 T_2 空间，φ 是闭映射，而遗传正规性在闭映射下是保持的(见 Engelking[1977]第96页)，这样 $\{0,1\}^{\omega_1}$ 将是遗传正规的. 然而 Tychonoff 板块能嵌入到 $\{0,1\}^{\omega_1}$ 作为其子空间，而它却不是正规的. 这就导致了矛盾，于是(3)得证. □

2.10.3 定理(MA + ┐ CH) 设 X 是局部可数的空间，$|X|<c$，X 可嵌入一个紧 T_2 空间 Z，而 $t(Z)=\omega$，则 X 可表示为可数个闭离散子空间的并. (Balogh[1983])

这里，$t(X)=\omega\cdot\min\{\kappa:\forall A\subset X \text{ 和 } x\in\bar{A}, \exists C\subset A, |C|\leqslant\kappa, x\in\bar{C}\}$ 称为空间 X 的紧度(tightness).

证明 令

$$\mathscr{W}\triangleq\{W:W \text{ 为 } Z \text{ 中的开集}, W\subset Z, |W\cap X|\leqslant\omega\},$$

$$\mathscr{V}\triangleq\{V:V \text{ 为 } Z \text{ 中的开集}, V\subset Z, \exists W\in\mathscr{W} \text{ 使 } \bar{V}\subset W\},$$

则 $\mathscr{W},\mathscr{V}$ 对有限并运算是封闭的. 取 $\mathscr{U}\subset\mathscr{V}$ 使 $|\mathscr{U}|<c$，$X\subset\bigcup\mathscr{U}$. 令 $S=\{(U,x):U\in\mathscr{U}, x\in X\cap U\}\subset\mathscr{U}\times X$. 则 S 的每个垂直截口 $S(U)$ 是可数集. 设 $P=[\mathscr{U}]^{<\omega}\times[X]^{<\omega}$，赋以 S-序. 今证明 $(P,\leqslant)$ 是 CCC PO. 若不然，则由定理2.9.6(2)，存在 $[\mathscr{U}]^{<\omega}$ 和 $[X]^{<\omega}$ 的互斥族 $\{K_\xi:\xi<\omega_1\}$，$\{L_\xi:\xi<\omega_1\}$，使得对每个不可数的 $C\subset\bigcup\{L_\xi:\xi<\omega_1\}$，存在 $\alpha<\omega_1$，使 $\{C\cap S(K_\xi):\alpha\leqslant\xi<\omega_1\}$ 有 fip. 令

$$V_\xi=\bigcup K_\xi\in\mathscr{V}$$

这时 $S(K_\xi)=V_\xi\subset X$. 又令

$$F_\alpha=\bigcap\{\bar{V}_\xi:\xi>\alpha\},\ F=\bigcup\{F_\alpha:\alpha<\omega_1\}.$$

因为$\{F_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是上升的闭集序列，而$t(X)\leqslant\omega$，所以$F$是$Z$的闭子集，因而是紧集．又因为$F_\alpha\subset\overline{V}_\alpha\subset\bigcup\mathscr{W}$，所以$F\subset\bigcup\mathscr{W}$．于是存在$W\in\mathscr{W}$，使$F\subset W$．然而$W\cap X$是可数的，于是$C=\bigcup\{L_\xi:\xi<\omega_1\}-W$就是不可数的．由定理2.9.6(2)，存在$\alpha<\omega_1$，使$\{C\cap V_\xi:\alpha\leqslant\xi<\omega_1\}$有fip．于是存在$z\in\bigcap\{\overline{C\cap V_\xi}:\alpha\leqslant\xi<\omega_1\}$．但由$F_\alpha$的定义，有$z\in F_\alpha$．又$z\notin W$，所以$F\subset W$不能成立，得出矛盾．

对$(P,\leqslant)$应用定理2.9.5(1)，这时X可表示为$X=\bigcup_n X_n$．对每个n和$U\in\mathscr{U}$，$X_n\cap U=X_n\cap S(\{U\})$是有限的．因为$\mathscr{U}$是$X$的开覆盖，所以每个$X_n$是闭离散集．□

2.10.4 定理(MA ω_1) 设X是紧T_2空间，$t(X)=\omega$．若$Y\subset X$是遗传CCC空间，则Y也是遗传可分和遗传Lindelöf的．(Szentmiklosy [1980])．

证明 由定理2.10.2(1)，Y是遗传可分的．假如Y不是遗传Lindelöf的，设Z是Y的一个子空间，使得Z有一个开覆盖$\mathscr{G}$，$\mathscr{G}$没有可数子覆盖．这时可从Z中选出$\{z_\xi:\xi<\omega_1\}$，从$\mathscr{G}$中选出$\{G_\xi:\xi<\omega_1\}$，使得$\forall\xi,z_\xi\in Z-\bigcup\{G_\eta:\eta<\xi\}$．令$W=\{z_\xi:\xi<\omega_1\}$．由于对每个$\xi$，$G_\xi\cap W$是可数的，因此子空间$W$是局部可数的．由定理2.10.3，$W=\bigcup_n W_n$是可数个闭离散集$W_n$的并．这时存在$n$，使$W_n$是一个不可数闭离散集．它与$Y$是遗传CCC空间的假设矛盾．□

2.10.5 引理(MA ω_1) 设X是全的，局部紧T_2空间，$Z=X\cup\{\infty\}$是X的单点紧化，则Z是序列空间．特别地，Z有可数紧度，即$t(x)=\omega$．

证明 设A是Z中的一个序列闭集．要证明A也是Z中的闭集，首先注意X本身是第一可数的．由于$A\cap X$是X中的序列闭集，从而它是X中的闭集，若$\infty\in A$，则显然A是Z中的闭集．若$\infty\notin A$，即$A=A\cap X$，A中的任何序列在Z中有丛点p，但A是序列闭的，所以点p不会是∞而应在X中，即$p\in A\cap X$，这说明A是Z中的可数紧子集．由定理2.5.3，A是紧的，从而A是X中的闭集．□

2.10.6 定理(MA ω_1) 设X是全的，局部紧的CWH空间，则X

可表示为一族 σ 紧子空间的拓扑和,从而 X 是强仿紧的.(Balogh [1983])

证明 (1) 假定存在具有紧闭包的开集序列 $\{G_\xi:\xi<\omega_1\}$,使 $X=\bigcup\{G_\xi:\xi<\omega_1\}$.令

$$C=\{\xi:\bigcup\{G_\eta:\eta<\xi\}\text{不是闭集}\}.$$

今证明 $C\subset\omega_1$ 不是平稳集.对每个 $\xi\in C$,取 $x_\xi\in(\bigcup\{G_\eta:\eta<\xi\})^- - \bigcup\{G_\eta:\eta<\xi\}$,并设 $\alpha(\xi)$满足 $x_\xi\in G_{\alpha(\xi)}$.记

$$F=\{\xi:\forall\eta\in C\cap\xi,\alpha(\eta)<\xi\}=\{\xi:\alpha(C\cap\xi)\subset\xi\},$$

则由 Kunen[1980]的Ⅱ.6.13,F 是一个 Cub.假如 C 是平稳集,则 $C\cap F$ 也是平稳的.注意当 $\eta<\xi$, $\eta\in C\cap F$ 时,有 $\alpha(\eta)<\xi$,所以 $x_\eta\in G_{\alpha(\eta)}$,而 $x_\xi\notin G_{\alpha(\eta)}$,于是$\{x_\xi:\xi\in C\cap F\}$是局部可数的.由引理2.10.5及定理2.10.3,$C\cap F$ 可表示为$\bigcup_n C_n$,使$\{x_\xi:\xi\in C_n\}=A_n$ 是离散的.又因为 X 的每个开集是F_σ 集,A_n 是离散的,所以 A_n 是闭子空间$\bar{A}_n$ 中的开集,于是存在 X 中的开集 G_n 使$A_n\cap G_n=\bar{A}_n\cap G_n$.设 $G_n=\bigcup_n F_{nm}$,其中 F_{nm}为X 中的闭集.令 $A_{nm}=A_n\cap F_{nm}$,则易见 $\bar{A}_{nm}=\bar{A}_n\cap F_{nm}=A_n\cap F_{nm}=A_{nm}$.所以 A_{nm}是X 中的闭离散集.而 $A_n=\bigcup_m A_{nm}$,记 $C_{nm}=\{\xi:x_\xi\in A_{nm}\}$,$C\cap F$ 是平稳的,故存在 n,m,使 $D=C_{nm}$是平稳的,$\{x_\xi:\xi\in D\}$是闭离散集.由 X 的族 Hausdorff 性,存在互斥开集族$\{H_\xi:\xi\in D\}$,使 $x_\xi\in H_\xi$ 对所有的$\xi\in D$ 成立.对每个 $\xi\in D$,由 $x_\xi\in(\bigcup\{G_\eta:\eta<\xi\})^-$,存在$f(\xi)<\xi$,使 $H_\xi\cap G_{f(\xi)}\neq\varnothing$.根据 Pressing down 引理,存在 $\zeta<\omega_1$,使 $D'=\{\xi\in D:f(\xi)=\zeta\}$是不可数的.但此时$\{H_\xi\cap G_\zeta:\xi\in D'\}$是 G_ζ 中不可数个非空开集,它们彼此互不相交.注意 $\bar{G}_\zeta$ 是紧的全正规空间,由定理2.5.2,$\bar{G}_\zeta$ 是遗传 CCC 的.这两者之间的矛盾说明 C 不是平稳集.

由于 C 不是平稳集,这样就存在一个 Cub $E\subset\omega_1-C$.不妨设$0\in E$,$E=\{\beta(\xi):\xi<\omega_1\}$.令

$$Y_\xi=\bigcup\{G_\eta:\eta<\beta(\xi+1)\}-\bigcup\{G_\eta:\eta<\beta(\xi)\},$$

则$\{Y_\xi:\xi<\omega_1\}$是 X 的一个划分,由于 $\beta(\xi)\notin C$,因此$\bigcup\{G_\eta:\eta<\beta(\xi)\}$是开闭集.于是 $X=\bigoplus\{Y_\xi:\xi<\omega_1\}$是 Y_ξ 的拓扑和,每个 Y_ξ 是局

部紧的全的正则空间.由引理 2.10.5 和定理 2.10.4, Y_ξ 是遗传 Lindelöf 局部紧空间,从而 Y_ξ 是 σ 紧的.

(2) 现在我们来证明 X 可以表示成一些子空间的拓扑和,其中每一项都可以用不超过 ω_1 个紧开集所覆盖. 这时再应用(1)中所证得的结果就能完成整个定理的证明.

归纳地定义由非空开集组成的互斥族序列 $\{\mathscr{G}_\xi^n : n\in\mathbf{N}, \xi<\omega_1\}$ 如下:

假定已经作好了 $\{\mathscr{G}_\xi^n : n\in\mathbf{N}, \eta<\xi\}$. 令

$$F_\xi = X - \bigcup\{\bigcup\mathscr{G}_\eta^n : n\in\mathbf{N}, \eta<\xi\}.$$

设 $\mathscr{H}_\xi$ 是 F_ξ 的一个由相对开、相对紧的子集构成的极大互斥族. 这时每个 $H\in\mathscr{H}_\xi$ 都是可分的.

设 $\{x_i^H : i\in\mathbf{N}\}$ 是 H 的一个稠密集. 令 $A_\xi^i = \{x_i^H : H\in\mathscr{H}_\xi\}$, 则 A_ξ^i 是离散集, 它可以表示为 $A_\xi^i = \bigcup\limits_j A_\xi^{ij}$. 其中 A_ξ^{ij} 是闭离散集. 设 $\{B_\xi^n : n\in\mathbf{N}\}$ 是 $\{A_\xi^{ij} : i, j\in\mathbf{N}\}$ 的重新排列. 注意 $\bigcup\limits_n B_\xi^n = \bigcup\{A_\xi^{ij} : i, j\in\mathbf{N}\} = \{x_i^H : i\in\mathbf{N}, H\in\mathscr{H}_\xi\}$ 是 $\bigcup\mathscr{H}_\xi$ 的稠密集, 由 $\mathscr{H}_\xi$ 的极大互斥性, 它也是 F_ξ 的稠密集. 由于 X 是局部紧的和 CWH 的, 对每个 n, 可以找到一个互斥的, 相对紧开集族 $\mathscr{G}_\xi^n$ 使 $B_\xi^n\subset\bigcup\mathscr{G}_\xi^n$. 这样就可以继续进行归纳.

今证明 $\mathscr{G} = \bigcup\{\mathscr{G}_\xi^n : n\in\mathbf{N}, \xi<\omega_1\}$ 是 X 的覆盖, 即 $\bigcap\limits_\xi F_\xi = \varnothing$. 假如有 $x\in\bigcap\{F_\xi : \xi<\omega_1\}$. 取 x 的一个紧邻域 V, 则 V 是遗传 Lindelöf 的, 而 $\{F_\xi : \xi<\omega_1\}$ 是下降闭集序列, 故存在 $\zeta<\omega_1$, 使 $V\cap F_\zeta = V\cap F_{\zeta+1}$. 这时 $V\cap F_\zeta\cap(\bigcup\{\mathscr{G}_\zeta^n : n\in\mathbf{N}\}) = \varnothing$. 从而 $V\cap(\bigcup\{B_\zeta^n : n\in\mathbf{N}\}) = \varnothing$. 但已知 $\bigcup\limits_n B_\zeta^n$ 是 F_ζ 的稠密集, 所以有 $V\cap F_\zeta = \varnothing$. 这与 $x\in F_\zeta$ 矛盾.

若 $H\in\mathscr{G}$, 则 H 有紧闭包, 所以 H 是 CCC 的. 对每个 n, ξ, 有

$$|\{G : G\in\mathscr{G}_\xi^n, H\cap G\neq\varnothing\}|\leqslant\omega.$$

从而

$$|\{G\in\mathscr{G} : H\cap G\neq\varnothing\}|\leqslant\omega_1.$$

设 $H, G\in\mathscr{G}$. 定义 $H\sim G$ 当且仅当 $G\cap H\neq\varnothing$. 则每个等价类 $\mathscr{E}$ 所含的元不超过 ω_1 个, 于是 $X_{\mathscr{E}} = \bigcup\mathscr{E}$ 有由相对紧开集组成的势 $\leqslant\omega_1$ 的覆盖. 由(1)可知 X 可表示为由 σ 紧子集组成的拓扑和 $\bigoplus\{X_\alpha : \alpha\in A\}$.

(3) 由于每个 X_a 是 σ 紧的,所以它是强仿紧的.这就证明了 X 也是强仿紧的. □

利用上述定理,我们来证明 D.Lane 的一个重要结果.

2.10.7 定理(MA ω_1) 设 X 是全正规,局部紧,局部连通的空间,则 X 的每个连通分支是开的 σ 紧集,从而 X 是仿紧的.(Lane[1980])

证明 设 $A\subset X$ 是闭离散集.由 X 的全正规性,存在下降的开集序列 $\{H_n:n\in\mathbf{N}\}$,使得 $\overline{H}_{n+1}\subset H_n$,并且 $\bigcap_n H_n=\bigcap_n \overline{H}_n=A$.对每个 $x\in A$,取 x 的一个相对紧开邻域 U_x,使 $\overline{U}_x\cap A=\{x\}$.这时 U_x 的边界 ∂U_x 是一个紧集,并且与 A 不相交.这样,存在 $n(x)$,使

$$\partial U_x\cap\overline{H}_{n(x)}=\varnothing.$$

由于 X 是局部连通的,因此它的开子空间 $U_x\cap H_{n(x)}$ 也是局部连通的.设 G_x 是 $U_x\cap H_{n(x)}$ 中包含点 x 的连通分支,则 G_x 开于 $U_x\cap H_{n(x)}$,从而也是 X 中的开集.设 $x,y\in A$,$x\neq y$,又设 $n(x)\leqslant n(y)$,则 $G_y\subset H_{n(y)}\subset H_{n(x)}$.所以 $G_y\cap\partial U_x=\varnothing$.注意 G_y 是连通集,$y\notin U_x$,即 $G_y\subset U_x$ 不成立.这样就必定有 $G_y\cap U_x=\varnothing$,从而 $G_y\cap G_x=\varnothing$.于是 $\{G_x:x\in A\}$ 是分离 A 的互斥开集族.这就证明了 X 是 CWH 空间.

现在应用定理 2.10.6,X 可以表示为一族开的 σ-紧子集的拓扑和.设 H 是其中一个项.H 是局部连通的,它可以表示成它的各个连通分支的拓扑和.H 又是 σ-紧的,所以这些连通分支也是 σ 紧的. □

我们把 Lane 的结果与下面的已知结果作一对照.

定理 A (1) 全正规,局部紧,局部连通空间关于次亚紧闭子集是族正规的.

(2) 全正规,局部紧,局部连通的次亚紧空间是仿紧的.(Reed,Zenor[1976]) □

定理 B (1) 正规,局部紧,局部连通的次亚紧空间是仿紧的.

(2) 正规,边缘紧,局部连通的次仿紧空间是仿紧的.(Gruenhage[1979]) □

定理 A 是一个相对而言比较早期得到的绝对性命题,定理 B 则是在 ZFC 系统内对定理 A 作出的一个重大改进(去掉了"全"的条件).

D.Lane的结果则是借助于 MA ω_1 去掉了定理 A 中关于次亚紧性的要求. 利用 Lane 的定理, 可以很容易地得出全正规流形的可度量性.

所谓流形, 指的是一个连通的 T_2 空间 X, 其中的每一个点 x 都对应有一个邻域, 它同胚于某个 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$. 1935 年 Alexandroff, 1949 年 Wilder 先后提出过全正规流形是否可度量的问题. 1976 年 Rudin 和 Zenor[1976]在 CH 下作出了一个不可度量的全正规流形. 他们所用的方法类似于构造 Kunen 线的技巧, 但涉及流形同胚的一些结果, 论证也较为繁复. 读者可参看 Nyikos[1984]. 1979 年 Rudin[1979b]在 MA + $\neg$ CH 下证明了全正规流形是可度量的. Lane 定理的原始论证实际上是 Rudin 技巧的一个改进. 定理 2.10.7 的论证则是更新一些技巧的应用.

2.10.8 定理(MA ω_1) 全正规流形是可度量的.

证明 设 X 是一个全正规流形, 则 X 是局部紧, 局部连通, 局部可度量的. 由定理 2.10.7, X 是仿紧的. 而仿紧的局部可度量的空间是可度量的. □

实际上, MA $\omega_1 \Rightarrow$ 每个全正规流形是可分度量空间. 这是因为它是连通的, 所以只有一个连通分支. 定理 2.10.7 说明它是 σ-紧的, 而 σ-紧的度量空间显然是可分的.

§11 Martin 公理与 S-L 问题

在第一章我们介绍了 S 空间与 L 空间的概念, 而且用 CH 构造了多种具有漂亮性质的 S 空间与 L 空间. 在这一章, 我们已经看到 Martin 公理在许多方面起着排除 S 空间和 L 空间存在可能性的作用. 推论 2.3.2, 推论2.3.4排除了 Lusin 集和 Sierepinski 集的存在. 2.1.12 排除了 Suslin 线的存在. 定理 2.1.5 指出了不存在局部紧的 L 空间. 2.10.2 指出不存在第一可数的 L 空间. 2.10.4 实质上也表明不存在局部紧的 S 空间. 这一节我们将给出两个进一步的结果, 即在 MA + $\neg$ CH 下, 第一章 §8 中所说的命题 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 都不成立. §10 中所说的 HFD 和 HFC 也都不能存在. 因而用 $\uparrow$, $\downarrow$ 或 HFD, HFC 来产生 S 空间和 L 空间也是行不

通的.

2.11.1　定理(MA ω_1)　$\downarrow$ 不成立.(van Douwen, Kunen[1982])

证明　回忆一下,$\downarrow$ 指的是下述命题:

($\downarrow$)存在序列$\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset\mathscr{P}(\omega)$,使得:

(1) $\alpha<\beta\Rightarrow x_\alpha\not\subseteq x_\beta$.

(2) $\forall I\in[\omega_1]^{\omega_1}$, $\exists\alpha,\beta\in I,\alpha<\beta,x_\beta\subseteq x_\alpha$.

为证明 $\downarrow$ 不成立,就需要证明,对任何一个给定的、满足条件(1)的序列$\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$,存在 $I\in[\omega_1]^{\omega_1}$,使得$\forall\alpha,\beta\in I,\alpha\neq\beta$,有 $x_\alpha\not\subseteq x_\beta$.

现在定义

$$\boldsymbol{P}=\{p\in[\omega_1]^{<\omega}:\forall\alpha,\beta\in p,\alpha\neq\beta,\text{有 }x_\alpha\not\subseteq x_\beta\},$$

并规定

$$p\leqslant q\Leftrightarrow q\subseteq p.$$

今证明($\boldsymbol{P},\leqslant$)是一个 CCC PO. 假定($\boldsymbol{P},\leqslant$)存在一个不可数的反链,由 Δ 系统论证和鸽笼原理,可以作出一个反链$\{p_\alpha:\alpha<\omega_1\}$,使它满足:

(3) $\forall\alpha,|p_\alpha|=n$($n$ 是某个固定的自然数).

(4) $\forall\alpha<\beta,\max p_\alpha<\min p_\beta$.

给$\mathscr{P}(\omega)$赋以 Cantor 拓扑,这时$\mathscr{P}(\omega)^n$ 是一个紧度量空间. 对每个 $\alpha<\omega_1$,取 $y_\alpha\in\mathscr{P}(\omega)^n$,使得$\{y_\alpha(i):1\leqslant i\leqslant n\}=\{x_\xi:\xi\in p_\alpha\}$. 定义

$$F_\alpha=\{z\in\mathscr{P}(\omega)^n:\text{对某个 }i(1\leqslant i\leqslant n)\text{和 }\xi\in p_\alpha,\text{有 }z(i)\in[\varnothing,x_\xi]\}.$$

注意区间$[\varnothing,x_\xi]$既是 Vietoris 拓扑中的开闭集同时也是 Cantor 拓扑中的闭集,因而 F_α 也是$\mathscr{P}(\omega)^n$ 中的闭集. 这样由(1),(3)得到

(5) $\alpha<\beta\Rightarrow y_\alpha\notin F_\beta$.

又由(1),(3)及 p_α,p_β 不相容可以得到

(6) $\alpha<\beta\Rightarrow y_\beta\in F_\alpha$.

由于各个 F_α 是闭集,综合(5),(6)便得到

(7) $\alpha<\beta\Rightarrow y_\alpha\notin \mathrm{Cl}\{y_\gamma:\alpha<\gamma<\omega_1\}$.

这样,$\{y_\alpha:\alpha<\omega_1\}$就是$\mathscr{P}(\omega)^n$ 中的一个非 Lindelöf 子空间. 但$\mathscr{P}(\omega)^n$ 是紧度量空间,从而是遗传 Lindelöf 的. 这个矛盾说明($\boldsymbol{P},\leqslant$)是 CCC 的.

设 $J=\{\{\alpha\}:\alpha<\omega_1\}$. 由定理 2.1.8,存在 $I\in[J]^{\omega_1}$,使 I 是定心的,于是对任何不同的 $\{\alpha\},\{\beta\}\in I$,存在 $\gamma\in P$,使 $\gamma\leqslant\{\alpha\},\gamma\leqslant\{\beta\}$,即 $\alpha,\beta\in\gamma$. 于是 $x_\alpha\not\subset x_\beta$. 所以命题 $\downarrow$ 不能成立.

因为 $\uparrow\Rightarrow\downarrow$,所以 MA $\omega_1\Rightarrow\uparrow$ 也不成立. □

为了证明在 MA + ¬ CH 下 HFD 和 HFC 不存在,我们先给出 Silver 的一个结论.

2.11.2 引理(MA + ¬ CH) 对任意 $\{A_n:n<\omega\}\subset\mathscr{P}(\omega_1)$,存在 $E\in[\omega]^\omega$,使得 $\bigcap\{A_n:n\in E\}$ 是不可数集,或者 $\bigcap\{\omega_1-A_n:n\in E\}$ 是不可数集.

证明 对 $\alpha<\omega_1$,令 $B_\alpha=\{n:\alpha\in A_n\}$. 用归纳方式定义 $\{X_\alpha:\alpha<\omega_1\}$,使它满足:(1) $\forall\alpha,X_\alpha\in[\omega]^\omega$;(2) $\forall\alpha$,或者 $X_\alpha\subset B_\alpha$,或者 $X_\alpha\subset\omega-B_\alpha$;(3) $\alpha<\beta\Rightarrow x_\beta\subset^* X_\alpha$.

当 $\alpha=0$ 时,若 B_0 是无限集,就取 $X_0=B_0$,否则取 $X_0=\omega-B_0$. 现设 $\{X_\beta:\beta<\alpha\}$ 已经定义好. 设 $X\to x$ 是 $\mathscr{P}(\omega)\to\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 的投影,则 $\{x_\beta:\beta<\alpha\}$ 是一个由非 0 元素组成的下降序列. 因为 $\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 有性质 H_ω,又所有的 $x_\beta>0$,所以存在 $x\in\mathscr{P}(\omega)/Fin$,使 $0<x<$ 所有 x_β. 设 X 是 x 的一个原像,则 $X\cap B_\alpha$ 或 $X-B_\alpha$ 之一必是无限集. 取相应的那个作为 X_α,就完成了归纳过程.

现在 $\{X_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 $(\mathscr{P}(\omega),\subset^*)$ 的一个下降 ω_1 序列. 由 MA ω_1,存在无限集 $X\in\mathscr{P}(\omega)$,使 $X\subset^* X_\alpha$ 对所有的 $\alpha<\omega_1$ 都成立,即 $\{X-X_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset[\omega]^{<\omega}$. 应用鸽笼原理,存在 $S\in[\omega_1]^{\omega_1}$ 和有限集 $F\subset\omega$,使得:(1) $\forall\alpha\in S,X_\alpha\subset B_\alpha$(或 $\forall\alpha\in S,X_\alpha\subset\omega-B_\alpha$);(2) $\forall\alpha\in S,X-X_\alpha=F$,令 $E=X-F$,则 $n\in E$ 时,有 $n\in X_\alpha\subset B_\alpha$,即 $\alpha\in A_n$(或 $n\in X_\alpha\subset\omega-B_\alpha$,即 $\alpha\in\omega_1-A_n$). 于是

$$S\subset\bigcap\{A_n:n\in E\}(\text{或 } S\subset\bigcap\{\omega-A_n:n\in E\}).$$ □

2.11.3 定理(MA + ¬ CH) 不存在 HFD.

证明 设 $X\subset 2^{\omega_1}$ 是一个可数无限集. 记 $F=\{\langle\alpha,i\rangle:\alpha<\omega_1,i=0,1\}$,则 $|F|=\omega_1$. 对 $x\in X$,记 $A_x=\{f\in F:x\in[f]\}$. 由 Silver 引理 2.11.2,存在 $Y\in[X]^\omega$,使 $S=\bigcap\{A_x:x\in Y\}$,$T=\bigcap\{F-A_x:x\in Y\}$ 之

一是不可数的.

(1) 若 S 不可数,注意 $f\in S\Rightarrow\forall x\in Y,f\in A_x\Rightarrow\forall x\in Y,x\in[f]\Rightarrow Y\subset[f]$. 因为 $|S|=\omega_1$,所以对任何 $\alpha<\omega_1$,存在 $\xi>\alpha$ 和 i,使 $f=\{\langle\xi,i\rangle\}\in S$. 于是 $Y\subset[f]$. 令 $g=\{\langle\xi,1-i\rangle\}$,则 $Y\cap[g]=\varnothing$.

(2) 若 T 不可数,注意 $f\in T\Rightarrow\forall x\in Y,f\notin A_x\Rightarrow\forall x\in Y,x\notin[f]\Rightarrow Y\cap[f]=\varnothing$. 因为 $|T|=\omega_1$,所以对任何 $\alpha<\omega_1$,存在 $\xi>\alpha$ 和 i,使 $f=\{\langle\xi,i\rangle\}\in T$. 于是 $Y\cap[f]=\varnothing$.

这就证明了,不论何种情况,Y 都不是尾性稠密的. □

2.11.4 定理(MA + ¬ CH) 不存在 HFC.

证明 设 $X=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset 2^{\omega_1}$, $M=\{\xi_n:n<\omega_1\}\subset\omega_1$. 对任何 $\langle n,i\rangle\in\omega\times\{0,1\}$,令 $A_n=\{x_\alpha\in X:x_\alpha(\xi_n)=i\}$. 由 Sliver 引理 2.11.2,存在无限集 $E\subset\omega\times\{0,1\}$,使 $S=\bigcap\{A_{ni}:\langle n,i\rangle\in E\}$ 或者 $T=\bigcap\{X-A_{ni}:\langle n,i\rangle\in E\}$ 是不可数的.

(1) 若 $x_\alpha\in S$,则 $\forall\langle n,i\rangle\in E$,有 $x_\alpha\in A_{ni}$,即 $x_\alpha\in[\{\langle\xi_n,i\rangle\}]$. 于是 $S\subset\bigcap\{[\{\langle\xi_n,i\rangle\}]:\langle n,i\rangle\in E\}$. 这样我们有

$$S\cap(\bigcup\{[\{\langle\xi_n,1-i\rangle\}]:\langle n,i\rangle\in E\})=\varnothing. \qquad (*)$$

(2) 若 $x_\alpha\in T$,则 $\forall\langle n,i\rangle\in E$,有 $x_\alpha\notin[\{\langle\xi_n,i\rangle\}]$. 于是 $x_\alpha\notin\bigcup\{[\{\langle\xi_n,i\rangle\}]:\langle n,i\rangle\in E\}$. 这样我们有

$$T\cap(\bigcup\{[\{\langle\xi_n,i\rangle\}]:\langle n,i\rangle\in E\})=\varnothing. \qquad (**)$$

(*)或(**)中的并显然是一个良性劈分的开集. 不论何种情况,它都不是 X 的尾性覆盖,所以 X 不可能是 HFC. □

但是 MA + ¬ CH 并不能绝对排除 S 或 L 空间存在的可能性. Todorcevic 甚至已经证明了存在第一可数的 S 空间与 MA + ¬ CH 是相容的. 他还进一步证明了 MA ω_1 与 TOP(Thining-out Principle,间苗原理)相结合可以证明不存在 S 空间. 而已知 MA ω_1 与 TOP 是相容的(它们都可以从 PFA(Proper Forcing Axiom)推出,但 Con(MAω_1 + TOP)的证明可以不涉及大基数. 这是与 Con(PFA + ZFC)的证明所不同的). 最后,关于不存在 L 空间是否与 ZFC 相容,迄今还没有得到证明,所以有些学者倾向于有可能找到 L 空间的绝对例子.

§12 后 记

Ⅰ. Martin 公理的其他一些应用

一、关于正规 Moore 空间和广义度量空间

这方面的一些结果,可参看文献 Tall[1969],Cook[1976],Alster,Przymusinski[1977],van Douwen,Wage[1979],Gruenhage[1980a],Reed[1980],[1986],van Douwen,Lutzer,Pelant,Reed[1980],Malyhin[1981],Balogh[1982],[1985],Foged[1986],钟宁[1994],Burke,Davis[1984]等.兹举数例如下:

2.12.1 1976年 Cook 宣布,在 MA + ┐ CH 下,存在正规 Moore 空间,它的平方不是正规的.但这个结论没有正式全文发表.1986 年 Reed 才正式证明这种空间的存在.

Alster,Przmysinski[1979]在 MA 下证明了:

2.12.2 定理 若 X 是正规,局部紧,可分 Moore 空间,则 X^{ω} 是正规 Moore 空间.

2.12.3 定义 X 称为星加细仿紧空间,如果对 X 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$,存在局部有限的开覆盖 $\mathscr{V}$,使 $\mathscr{V}$加细$\{St(x,\mathscr{U}):x\in X\}$.(Reed[1980])

Tall[1969]证明了:

2.12.4 定理(MA + ┐ CH) 存在不可度量的正规,星加细仿紧的 Moore 空间.

Reed[1980]证明了:

2.12.5 定理(MA + ┐ CH) 存在星加细仿紧的 Moore 空间,它不是正规的.

Reed[1980]还证明了:

2.12.6 定理(MA + ┐ CH) 存在可数仿紧,非正规的可分 Moore 空间.

在 Gruenhage[1980a]中,他证明了:

2.12.7 定理(MA) 势 $<c$ 的全正规,局部紧空间是 Moore 空间.

(MA + ¬ CH) 全正规,局部紧空间若相对于紧集族是族正规的,则它是仿紧空间.

Balogh[1985]放弃了全正规这个条件,得到如下结果:

2.12.8 定理(MA ω_1) 若 X 是势为 ω_1 的第一可数 T_2 空间,则 X 或者是 Moore 空间,或者 X 包含有 ω_1 的全原像.

在不可度量的正规 Moore 空间存在性方面,Navy[19??]证明了:

(MA + ¬ CH) 存在仿 Lindelöf 的不可度量的正规 Moore 空间.

而 Gruenhage[1984b]则证明了:

(MA + ¬ CH) 存在局部紧、连通的不可度量的正规 Moore 空间.

2.12.9 定理(MA) 势 $< c$ 的、有 σ 点有限基的空间是全的和亚紧的.(Fleissner, Reed[1977])

2.12.10 定理 $P(c)$⇒存在 σ 离散的 CWH Moore 空间,它不是伪正规的.

(X 称为伪正规的,如果对任何一个闭集 A 和与它不相交的一个势 $\leqslant \omega$ 的闭集 B,存在分别包含 A 和 B 的不相交开集.)

$P(c)$⇒存在一个有性质 D 的 Moore 空间,它不是伪正规的.(van Douwen, Wage[1979])

2.12.11 关于遗传强Σ空间的研究,Balogh[1982]得到下述相容性的结论:

(1) MA + ¬ CH⇒存在 0 维,T_2, Lindelöf,遗传仿紧,第一可数的遗传强Σ空间,它不是 σ 空间.

(2) MA + ¬ CH⇒存在可分, Lindelöf 的遗传强Σ空间,它不是 σ 空间.

(3) MA + ¬ CH⇒设 $M \subset (-\infty, \infty)$, $\omega < |M| < 2^{\omega}$,则 M 的 Alexandroff 复本 $A(M)$是遗传仿紧的 p 空间,从而是遗传强Σ空间,但它没有 G_δ 性质,从而不是 σ 空间.

2.12.12 定理(MA + ¬ CH) 存在不是单调正规的 k-$\aleph$-空间.(Foged[1986])

二、关于紧性和其他覆盖性质

2.12.13 X 称为 ω_1 全正规的,如果 X 中任意 ω_1 个零集之交是零

集.

Cigogidze[1979]证明了：

2.12.14 定理(MA+¬ CH) 任何一个 ω_1 全正规的可数紧空间都是全正规紧空间.

2.12.15 定义 空间 X 中的子集族 $\mathscr{A}$ 称为弱 Noether 的，如果 $\mathscr{A}$ 中任一个元都被包含在 $\mathscr{A}$ 中不超过可数个元之内(即 $\forall E\in\mathscr{A}$, $|\{A\in\mathscr{A}: E\subset A\}|\leqslant\omega$). X 称为弱 Noether 空间，如果 X 有一个基 $\mathscr{B}$，使 $\mathscr{B}$ 是弱 Noether 的.

Malyhin[1981]证明了：

2.12.16 定理(MA+¬ CH) (1) 紧空间 $\beta\omega$-ω 不是弱 Noether 空间.

(2) 存在紧 T_2 可分空间 X，它没有弱 Noether 的 π 基.

2.12.17 权 $w(X)\leqslant 2^{\omega}$ 的紧 CCC 空间 X 被称为 C 空间. 不用任何集论假设，可以通过构造 ω^* 的连续像作出 C 空间.

Parovecenko 曾证明：CH⇒任何 C 空间都是 ω^* 的连续像. 但是 Bell [1980]证明了：

MA+¬ CH⇒存在 C 空间，它不能表示为 ω^* 的连续像.

2.12.18 定理(BF(c)) 紧，无处可分，CCC 的 F 空间当权 $\leqslant c$ 时包含有弱 P 点.(Dow[1982b])

(MA) 若 X 是紧 T_2 可分空间，X 的 π 权 $\pi(X)$ 是正则基数，则 X 有 P 点 p，它不是任何可数离散集的聚点.

2.12.19 定理(MA) (1) 存在序列紧空间，它有一个点不是 $\pi(c)$点.(Malyhin[1975])

(2) 存在紧的 Fréchet 空间，它有一个点不是 $\pi(c)$点.(Malyhin [1979a])

这里所说的 $\pi(c)$点是指这样的点 x，$\{x\}$ 能表示成 $<c$ 个正则闭集之交.

三、乘积空间

除了 2.12.1 和 2.12.2 外，应用 MA+¬ CH 研究乘积问题，我们介绍下列一些结果：

2.12.20 定理(MA+¬ CH) 存在不可度量的紧 T_2 空间,它的平方是遗传正规的.(Nyikos[1977])

2.12.21 定理(MA) 存在强 Frechet 空间 X,其中 $|X|=\omega$,并且 X 只有一个非孤立点,使得 X^ω 不是 Frechet,但对任何 $n\in\mathbf{N}$, X^n 是 Frechet 空间.(Gruenhage[1978])

2.12.22 定理(MA) 若 X 是正规的局部紧可分 Moore 空间,则 X^ω 是正规的.(Alster, Przymusinski[1977])

Ⅱ. Martin 公理的推广

在第二章 §1 中我们已经指出,MA 是 CH 的一个推论.仅仅从 MA 推得的结论都可以由 CH 推出.所以,为了使 MA 能获得一些有实质性意义的拓扑学命题,往往需要把它和¬ CH 结合起来.一些集论学者探索了如何对 Martin 公理作形式上的推广的问题.因为 MA 最好的表述方式是半序形式,所以其推广往往是以一些比 CCC 条件更强的条件,比如 Knaster 条件、P的σ-定心性、σ-交联性等来取代 CCC,得到一些比 MA 较弱的形式,但这方面的成果尚不很多.另一个极富成果的推广则是用"Proper 序"来取代 CCC 序,得出 PFA,即 Proper Forcing Axiom.

2.12.23 定义 PFA 表示如下的命题:设$(P,\leqslant)$是一个 Proper 半序集,$\{D_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是$P$的稠密集序列,则存在一个滤子 G,使得对每个 α, $G\cap D_\alpha\neq\varnothing$.

但什么是 Proper 半序呢? 理解这个概念时涉及集论模型的 forcing 扩张,而且直接根据这种定义来检验某个具体的半序集是否 Proper 半序是极为困难的.后来,人们终于找到了一种运用对策论语言来表述 Proper 半序和 PFA 的方法(参看 Fremlin[1988]).

设给定一个半序集$(P,\leqslant)$.考虑下述对策:第一个回合,甲任取一个 $p_0\in P$和一个极大反链 $A_0\subseteq P$,然后乙取一个可数集 $B_{00}\subset A_0$;第二个回合,甲再取一个极大反链 $A_1\subseteq P$,乙再取可数集 $B_{10}\subset A_0$ 和可数集 $B_{11}\subseteq A_1$……在第 $n+1$ 个回合时,甲取一个极大反链 $A_n\subseteq P$,乙则取可数集 $B_{nm}\subseteq A_n(m\leqslant n)$.当 p_0, $\{A_n:n<\omega\}$, $\{B_{nm}:m\leqslant n<\omega\}$选取完毕时,如果存在 $p_1\geqslant p_0$,使得对每个 m 和任意满足$p_2\geqslant p_1$ 的 p_2,都存在一个元$\in\bigcup_{n\geqslant m}B_{nm}$,使该元与 p_2 是相容的,就称乙方获胜,否则甲方获

胜.

2.12.24 定义 $(P,\leqslant)$称为 Proper 序,如果在上述对策中乙方有必胜策略.

已经证明,每个 CCC 半序也一定是 Proper 半序.因此由 PFA 可以推断 MA ω_1 成立.

但与 MA ω_1 不同,PFA 与 ZFC 的相容性证明需要用大基数假设,即有下面的定理:

2.12.25 定理 Con(ZFC + $\exists$超紧基数)$\Rightarrow$Con(ZFA + PFA).

另一个基本结论是:

2.12.26 定理 PFA$\Rightarrow$MAω_2 不成立.

实际上,进一步有

$$\text{PFA}\Rightarrow 2^{\omega_1}=\omega_2.$$

这是 Todorcevic 1987 年宣布的结论(见 Fremlin[1988]后面的说明).

关于 PFA 的研究,Baumgartner 在 *Handbook of Set-theoretic Topology* 中撰写了一章作为专题介绍.Shelah 还写了一部专著 *Proper Forcing*.它们都是从集论的角度来研究的.在拓扑学方面的应用文章还不很多.Fremlin 用它来研究 ω_1 的全原像的问题[1988].他证明了:

2.12.27 定理(PFA) 设 X 是拓扑空间,使得:

(1) 存在 X 到ω_1 内的闭映射 π,使 $\pi(X)$是不可数的.

(2) 存在由 X 的子集组成的一个理想ϑ,使得:

① $\forall W\in\vartheta$,$\exists$序列闭集 $F\subset X$,使 $W\subset X-F\in\vartheta$.

② $\pi(X-W)$对每个 $W\in\vartheta$ 都是不可数的.

③ $\forall Z\in\mathscr{P}(X)-\vartheta$,$\exists\{Z_\xi:\xi<\omega_1\}\subset[Z]^\omega$,使得

$$\{x:x\in X,x\in\overline{\bigcup\{Z_\xi:\xi\in\pi(x)\}}\}\in\vartheta,$$

则 X 含有一个同胚于ω_1 的子空间.

2.12.28 定理(PFA) 设 X 是局部紧,局部遗传 CCC 的 T_2 空间,则 X 包含有ω_1 的拷贝的充分必要条件是 X 的单点紧化$\omega(X)$没有可数紧度,即 $t(\omega(X))>\omega$.

2.12.29 定理(PFA) 设 X 是第一可数的局部紧 T_2 空间,$|X|\leqslant$

ω_1,则 X 是 Moore 空间当且仅当 X 不包含 ω_1 的拷贝.

2.12.30 定理(PFA) 一个流形 M 是可度量的充要条件为 X 是 CWH 的并且不包含 ω_1 的拷贝.

2.12.31 定理($PFA + c = \omega_2$) 设 X 是紧 T_2 空间,$|X| = \omega_1$,则 $t(X) = \omega$ 的充分必要条件是 X 不包含 ω_1 的拷贝.

Balogh 在研究具有可数紧度的紧空间时,应用 PFA 得到了一些好结果(见 Balogh[1989]).

2.12.32 定理(PFA) 若 X 是紧 T_2 空间,$t(X) = \omega$,则它的每个可数紧子空间都是紧的.

2.12.33 定理($PFA + c = \omega_2$) 每个紧 T_2 空间当它有可数紧度时一定也是序列空间.

2.12.34 定理($PFA + c = \omega_2$) 若 X 是紧 T_2 空间,则 X 或者是序列空间,或者包含有 ω_1 的全原像.

关于 PFA 的应用,还可以参看周浩旋与 Fitzpatrick[1992],Alan Dow [1988a],Roitman[1994]等.

周浩旋等[1992]证明了,PFA 蕴涵存在势 $< 2^\omega$ 的 Baire 空间,它具有可数稠密齐性(Countable Dense Homogenity).在 Dow[1988a]的文章中,讨论了 ω_1^* 的子空间 $SU(\omega_1)$($SU(\omega_1) = \bigcup\{\alpha^* : \alpha < \omega_1\}$),证明了 PFA 蕴涵下述结论:

若 A,B 是 $SU(\omega_1)$中两个势为 ω_1 的不相交子集.如 A、B 能被ω_1^* 中两个不相交的开集分离,则它也可以被不相交的开闭集分离.

容易证明,紧 T_2 空间$[0,\omega_1]$具有如下一个特性:它的任何一个不可数闭子空间都和它自身同胚.Roitman 介绍了 Gruenhage 指出的一个结论:PFA⇒满足上述条件的紧 T_2 空间是唯一的.

第三章　弱连续统假设与 Q 集

弱连续统假设和存在 Q 集的假设分别是 CH 和 MA + ¬ CH 的推论．它们在 Moore 空间度量化问题研究方面起着十分重要的作用．Moore 空间具备什么条件时就是可度量化的呢？我们已经知道了许多经典性的结论，例如：

(1) 仿紧(Yu.Smirnov)（充要）.

(2) CWN(R.H.Bing)（充要）.

(3) 正规＋可遮(参看 Burke[1984a],4.17)（充要）.

(4) 可分＋亚紧．

(5) 局部紧＋亚紧．

(6) 正规＋局部紧＋局部连通．

除此之外，还有大量派生的结论．但其中也有一些基本的问题，通过深入研究后发现它们是不可能在 ZFC 系统中得出解答的．本章主要介绍弱连续统假设和存在 Q 集的假设在解答关于可分正规 Moore 空间度量化问题上的应用，然后附带地介绍一下正规 Moore 空间度量化问题研究的一些进展情况．

§1　弱连续统假设及其应用

3.1.1　定义　弱连续统假设是指 $2^{\omega} < 2^{\omega_1}$.　□

由 CH $2^{\omega} = \omega_1$ 及 $\omega_1 < |\mathscr{P}(\omega_1)| = 2^{\omega_1}$，可以直接看出弱连续统假设是连续统假设的推论．但是确实也存在弱连续统假设成立而 CH 不成立的集论模型(参看 Kunen[1980]第 216 页定理 6.18).

3.1.2　定义　设 X 是一个 T_2 空间．

(1) X 称为弱 ω_1CWH(弱 ω_1 族 Hausdorff)的，如果对 X 的任何一个不可数的闭离散集，都存在一个势为 ω_1 的子集，它是可以分离的．

(2) X 称为有拟 WD 性质,如果 X 的任何一个不可数闭离散集都有一个势为 ω_1 的子集 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 和离散开集族 $\{U_\alpha:\alpha<\omega_1\}$,使得 $x_\alpha \in U_\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$.

(3) X 称为 DCCC(满足离散可数链条件),如果它的每个离散开集族都有 $\leqslant\omega$ 的势. □

DCCC 这一概念由 Wiscamb[1969]引出,这是一个相当弱的性质. 比如每个 * Lindelöf 空间,每个弱 Lindelöf 空间都是 DCCC,每个伪紧空间也是 DCCC.

容易验证,正则空间 X 是 $\aleph_1$ 紧的当且仅当 X 是 DCCC,同时具有拟 WD 性质. 若 X 是正规空间,则拟 WD 性质与弱 ω_1CWH 两者等价.

3.1.3 定义 $\mathscr{P}(\omega)$的一个子族称为独立族(independent family),如果对它的任意互不相同的有限个元 $a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n$,有

$$\left|\left(\bigcap_{i=1}^{m}a_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{n}(\omega-b_j)\right)\right|=\omega. \qquad \square$$

3.1.4 引理 存在势 $=c$ 的独立族.

证明 取 $[\omega]^\omega$ 的一个势 $=c$ 的 adf $\mathscr{A}$. 记 $I=\{\langle s,\mathscr{S}\rangle: s\in[\omega]^{<\omega},\mathscr{S}\subset\mathscr{P}(s)\}$. 对每个 $x\in\mathscr{A}$,记 $f(x)=\{\langle s,\mathscr{S}\rangle: x\cap s\in\mathscr{S}\}$. 设 $x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n\in\mathscr{A}$ 是互不相同的元. 由 $\mathscr{A}$ 的几乎互斥性,对每个 i, $x_i-\bigcup_{j=1}^{n}y_j$是无限集,同理,对每个 j, $y_j-\bigcup_{i=1}^{m}x_i$ 是无限集. 从这些差集中各取一元 $a_i,b_j(i\leqslant m,j\leqslant n)$,使它们彼此不同,记 $s=\{a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_m\}$,又令 $\mathscr{S}=\mathscr{P}(\{a_1,\cdots,a_m\})$,则对任何 i, $x_i\cap s\subset\{a_1,\cdots,a_m\}$. 从而 $x_i\cap s\in\mathscr{S}$, 并且 $x_i\cap s\neq\varnothing$,而对任何 j, $y_j\cap s\neq\varnothing$, $y_j\cap s\subset\{b_1,\cdots,b_n\}$,于是 $y_j\cap s\in\mathscr{S}$. 因为 a_i,b_j 的取法有无限多种,所以这种 s 也有无限多个,即

$$\left|\left(\bigcap_{i=1}^{m}f(x_i)\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{n}(I-f(y_i))\right)\right|=\omega.$$

现在记 $I=\{i_k:k<\omega\}$. 对每个 $x\in\mathscr{P}(\omega)$,令 $\varphi(x)=\{k:i_k\in f(x)\}$,则 $\varphi(x)\in[\omega]^\omega$. 易见 $\varphi|_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{A}$ 上的单射,并且 $\{\varphi(x):x\in\mathscr{A}\}$是一个独立族. □

3.1.5 定理 若弱连续统假设不成立,即 $2^\omega=2^{\omega_1}$,则存在一个正

规、可分非$\aleph$紧的空间．

证明 取一个势为 ω_1 的集 L. 按归纳法将 $\mathscr{P}(L)$ 划分成两部分 $\mathscr{P}_0$ 和 $\mathscr{P}_1$，使得 $A\in\mathscr{P}_0$ 当且仅当 $L-A\in\mathscr{P}_1$. 于是 $|\mathscr{P}_0|=|\mathscr{P}_1|=2^{\omega_1}=2^{\omega}$. 记 $\mathscr{P}_0=\{A_\alpha:\alpha<2^\omega\}$. 又设 $\{F_\alpha:\alpha<2^\omega\}$ 是 $\mathscr{P}(\omega)$ 的一个独立族，定义 $\psi(A_\alpha)=F_\alpha$，又对每个 $A\in\mathscr{P}_1$，定义 $\psi(A)=\omega-\psi(L-A)$，则 ψ 是 $\mathscr{P}(L)$ 到 $\mathscr{F}=\{F_\alpha:\alpha<2^\omega\}\cup\{\omega-F_\alpha:\alpha<2^\omega\}$ 上的一个一一对应．设 $X=\omega\cup L$. 取 $\mathscr{S}=\{\{n\}:n\in\omega\}\cup\{X-\{p\}:p\in X\}\cup\{M\cup\psi(M):M\subset L\}$ 作为 X 的拓扑子基，记由此生成的 X 的拓扑为 τ. 容易验证 (X,τ) 是 T_1 的，L 是闭离散集．由 $|L|>\omega$，(X,τ) 不是$\aleph$紧的．下面我们来验证 X 的正规性和可分性．

(1) 正规性．设 A,B 是互斥闭集．先假设 $A\subset L,B\subset L$，取 $U=A\cup\psi(A)$，$V=(L-A)\cup\psi(L-A)$，则 U,V 是互斥开集．而 $B\subset V$，对一般情况下的 A,B，取 $U=(A\cup\psi(A\cap L))-B$，$V=((B-L)\cup((L-A)\cup\psi(L-A)))-A$ 即可．

(2) 可分性．考虑 $\mathscr{S}$ 的任意有限交 $[\bigcap_{i=1}^{m}(M_i\cup\psi(M_i))]\cap[\bigcap_{j=1}^{n}(N_j\cup\psi(N_j))]$（其中 $M_i\in\mathscr{P}_0$, $N_j\in\mathscr{P}_1$）．注意 $L-N_j\in\mathscr{P}_0$，它包含了 $[\bigcap_{i=1}^{m}\psi(M_i)]\cap[\bigcap_{j=1}^{n}(\omega-\psi(L-N_j))]$. 由于 $\{F_\alpha:\alpha<2^\omega\}$ 是独立族，这个交是不空的，所以 ω 是 X 的开稠密集． □

3.1.6 定理 下列各个命题彼此等价：

(1) $2^\omega<2^{\omega_1}$.

(2) 每个特征 $\leqslant 2^\omega$ 的正规空间都是弱 ω_1CWH.

(3) 每个特征 $\leqslant 2^\omega$ 的正规 DCCC 空间都是$\aleph$紧的．

(4) 每个特征 $\leqslant 2^\omega$ 的正规可分空间都是$\aleph$紧的．

证明 (2)⇒(3)⇒(4)是明显的．(4)⇒(1)即是定理3.1.5. 下面我们来证明(1)⇒(2). 设 X 是一个正规的，特征 $\leqslant 2^\omega$ 的空间，设 $D=\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 X 的一个闭离散集．对每个 x_α，取它的一个势 $\leqslant 2^\omega$ 的局部基 $\mathscr{B}_\alpha$. 对任意 $A\in\mathscr{P}(D)$，取开集 U_A，使 $A\subset U_A$，$\overline{U_A}\cap(D-A)=\varnothing$. 记 $\mathscr{B}_A=\bigcup\{\mathscr{B}_\alpha:x_\alpha\in A\}$，并取 $\{U\in\mathscr{B}_A:U\subset U_A\}$ 的一个极大互斥族

$\mathscr{S}_A$. 显然有$(\bigcup\mathscr{S}_A)^-\subset\overline{U_A}$. 若$A,B\in\mathscr{P}(D),A\neq B$,则$\mathscr{S}_A\neq\mathscr{S}_B$(注意$\mathscr{S}_A=\mathscr{S}_B$蕴涵$\bigcup\mathscr{S}_A\subset\overline{U_B}$,$\bigcup\mathscr{S}_B\subset\overline{U_A}$,从而由$\mathscr{S}_A$及$\mathscr{S}_B$的极大性,有$A=B$). 假若$X$不是弱$\omega_1$CWH,则每个$\mathscr{S}_A$应有$|\mathscr{S}_A|\leqslant\omega$. 于是$A\to\mathscr{S}_A$将是$\mathscr{P}(D)$到$[\mathscr{B}_D]^{\leqslant\omega}$的单射. 因为$|\mathscr{P}(D)|=2^{\omega_1}$,而$|[\mathscr{B}_D]^{\leqslant\omega}|=2^{\omega}$,所以$2^{\omega_1}=2^{\omega}$. 这与(1)矛盾. □

由定理3.1.6立即可以得到如下的结论:

3.1.7 定理$(2^{\omega}<2^{\omega_1})$ 任何正规DCCC的Moore空间,特别是任何可分正规Moore空间都是可度量的.

证明 Moore空间有特征ω. 定理3.1.6说明正规DCCC空间是$\aleph_1$紧的,而$\aleph_1$紧的Moore空间则是可度量的. □

3.1.8 定理$(2^{\omega}<2^{\omega_1})$ (1) 正规DCCC的β空间若有点可数基,则它是可度量的.

(2) 局部DCCC的正规亚紧Moore空间是可度量的.

(3) 全正规局部DCCC空间若有σ-局部可数基,则它是可度量的.(戴牧民[1990])

证明 设X满足定理中命题(1)所述的条件,则定理3.1.6表明它是$\aleph_1$紧的,从而是* Lindelöf的. 而有点可数基的空间是亚Lindelöf的,于是X就是Lindelöf空间. 由Chaber的一个结果(参看Gruenhage[1984a]的7.5),有点可数基的次亚紧β空间是可展的,于是命题(1)得证. 在(2)的情形下,注意亚紧Moore空间有σ-点有限基,利用(1)的结果就可以知道X是局部可度量的,因此X是局部可分的. 而已知局部可分、有点可数基的空间是可度量的(参看Gruenhage[1984a]7.2),在(3)的情形下,注意有σ-局部可数基的空间是亚Lindelöf的,于是X是局部Lindelöf的. 但有σ-局部可数基的正则Lindelöf空间是可度量的(Fleissner, Reed[1997]的2.1(a)),这样,X是局部可分,局部可度量的. 再由Gruenhage[1984a]的7.2就可得出X是可度量的. □

以上是用弱连续统假设来研究有某种基的正规空间与可度量性之间的关系得到的一些结果. 刘川在研究具有σ-遗传保闭包k-网的空间与$\aleph$空间的关系时也给出了一些与弱连续统假设等价的命题.

3.1.9 定理 下列命题等价:

(1) $2^{\omega} < 2^{\omega_1}$.

(2) 每个正规的，特征$\leqslant 2^{\omega}$的，有σ-遗传保闭包k-网的DCCC空间X都是$\aleph_0$空间．

(3) 每个正规可分的有σ-遗传保闭包k-网的空间X都是$\aleph_0$空间．（刘川[1993]）

证明 (1)⇒(2)．设X满足(2)的条件，由定理3.1.6可知X是$\aleph$紧的．根据林寿[1988]的一个结果，$\aleph$紧，有σ-遗传保闭包k-网的空间是$\aleph_0$空间．

(2)⇒(3)．设X满足(3)的条件．注意对于正则空间X，有$w(X) \leqslant 2^{d(X)}$（见Hodel[1984]3.3），因而$\chi(x) \leqslant 2^{\omega}$．(3)的结论可以由(2)直接推得．

(3)⇒(1)．设$\{A_\alpha : \alpha < 2^{\omega} = 2^{\omega_1}\}$是$\omega$的一个极大独立集族，又设$\mathscr{P}(\omega_1) = \{H_\alpha : \alpha < 2^{\omega} = 2^{\omega_1}\}$．对$\zeta < \omega_1$，定义$U'_\zeta = \{A_\alpha : \zeta \in H_\alpha\} \cup \{\omega - A_\alpha : \zeta \notin H_\alpha\}$．容易验证$U'_\zeta$是一个滤子基，设$U_\zeta$是由$U'_\zeta$生成的超滤，并把它看成$\beta\omega$-$\omega$中的点．记$X = \omega \cup \{U_\zeta : \zeta < \omega_1\} \subset \beta\omega$．作为$\beta\omega$的子空间，$X$是正规，可分但不是$\aleph$紧的．令$\mathscr{P}_0 = \{\{U_\zeta\} : \zeta < \omega_1\} \cup \{\{0\}\}$，$\mathscr{P}_n = \{\{n\}\}$，则$\mathscr{P} = \bigcup\{\mathscr{P}_n : n < \omega\}$是$X$的一个网络．注意$X$的每个紧子集是有限的，并且任何一个收敛序列都是平凡的，因而$\mathscr{P}$是X的一个σ-遗传保闭包的k-网．然而X却不是$\aleph_0$空间，因为它显然不是遗传可分的． □

具有σ-局部有限k-网的空间称为$\aleph$空间．显然每个$\aleph$空间都有σ-遗传保闭包的k-网．但这两类空间通常是不完全相同的．著名的空间S_{ω_1}（ω_1个收敛序列将极限粘成一点所得的空间）就是有σ-遗传保闭包k-网但不是$\aleph$空间的例子．然而这两类空间又存在着一个很微妙的关系．1992年林寿证明了以下定理：

3.1.10 定理 一个有σ-遗传保闭包k-网的k空间是$\aleph$空间的充要条件为它不含S_{ω_1}的闭拷贝．（林寿[1992]） □

Junnila和恽自求[1992]则得到了更深入一些的结论：

3.1.11 定理 设X是一个有σ-遗传保闭包k-网的空间，则X是

ℵ空间的充要条件是它不含 S_{ω_1} 的闭拷贝． □

注意 $\chi(S_{\omega_1}) > \omega_1$，而正则可分空间 X 有 $\chi(X) \leqslant w(X) \leqslant 2^{d(X)} = 2^{\omega}$，于是就可以得出如下的结论：

3.1.12 定理 $CH \Rightarrow$ 任何一个有 σ-遗传保闭包 k-网的可分空间都是ℵ空间．(刘川[1993]) □

1978 年，Devlin 和 Shelah 在文[1978]中给出了弱连续统假设的等价刻画——弱◇原理．

设 κ 是一个无限基数．记 ${}^{<\kappa}A = \bigcup\{{}^{\alpha}A : \alpha < \kappa\}$．又设

$\vartheta = \{A \subset \omega_1 : \exists F : {}^{<\omega_1}2 \to 2$，使得 $\forall g \in {}^{\omega_1}2$，$\exists f \in {}^{\omega_1}2$，$\{\alpha \in A : F(f\restriction_\alpha) = g(\alpha)\}$ 是非平稳的$\}$．

可以证明，ϑ 是一个包含 ω_1 的所有非平稳集的 σ-完备的正规理想．所谓弱◇原理指的就是如下命题：$\omega_1 \notin \vartheta$．也就是说，$\vartheta$ 是一个真理想．他们证明了如下结论．

3.1.13 定理 $2^{\omega} < 2^{\omega_1} \Leftrightarrow \omega_1 \notin \vartheta$． □

定理 2.6.10 证明了在 MA + ¬ CH 下，每个 Aronszajn 树都是特殊的，并且都是正规 Moore 空间．利用弱◇原理，Devlin 与 Shelah[1979]证明了下面定理．

3.1.14 定理($2^{\omega} < 2^{\omega_1}$) 设 T 是一个特殊的 Aronszajn 树，$T = \bigcup\{A_n : n < \omega\}$，其中 A_n 是反链，则在树拓扑下，T 不是正规空间．

证明 不失普遍性，我们可以把 T 等同于集 ω_1，并且 $<_T$ 为树 T 的半序，使它满足：$\alpha <_T \beta$ 时有 $\alpha < \beta$，而且当 α 是极限序数时 $h(\alpha) = \alpha$．设 ϑ 是前面所述的 σ-完备理想．由 ϑ 的 σ-完备性，存在 n_0，使 $A_{n_0} \notin \vartheta$．令 $E = A_{n_0} \cap \Lambda$（Λ 为 ω_1 的极限序数的集）．

定义 $F : {}^{<\omega_1}2 \to 2$ 如下：设 $f \in {}^{\alpha}2$，若存在 $\gamma <_T \alpha$，使得对所有满足 $\gamma <_T \beta <_T \alpha$ 的 β 有 $f(\beta) = 0$，就令 $F(f) = 0$，否则令 $F(f) = 1$．因为 $E \notin \vartheta$，所以存在 $g \in {}^{\omega_1}2$，使得对所有的 $f \in {}^{\omega_1}2$，集 $\{\alpha \in E : F(f\restriction\alpha) = g(\alpha)\}$ 是平稳的．设 $J = \{\alpha \in E : g(\alpha) = 0\}$，$K = \{\alpha \in E : g(\alpha) = 1\}$．由于 E 是 T 的一个反链，J 和 K 都是 T 的闭子集，假若存在 T 的不相交的开集 U, W，使 $J \subset U, K \subset W$，定义 $f \in {}^{\omega_1}2$，使 $f(\alpha) = 1$ 当且仅当 $\alpha \in$

W,则由 g 的性质,$E'=\{\alpha\in E:F(f\upharpoonright\alpha)=g(\alpha)\}$是平稳的．固定 $\alpha\in E'$,假若 $g(\alpha)=0$,则 $F(f\upharpoonright\alpha)=0$. 于是存在 $\gamma<_T\alpha$,使得对所有满足 $\gamma<_T\beta<_T\alpha$ 的 β 有 $f(\beta)=0$. 由 f 的定义,$(\gamma,\alpha)_T\subset W$. 但是 $g(\alpha)=0$ 表明 $\alpha\in J$. 这是矛盾的．若 $g(\alpha)=1$,类似地推理也可以得出矛盾,所以 J,K 是一对不能用开集分离的不相交闭集,T 不是正规空间．□

运用类似的技巧,N.Kemoto[1987]证明了下面一些有趣的结果,开拓了弱连续统假设的应用范围．

3.1.15 引理($2^{\omega}<2^{\omega_1}$) 设 X 是特征 $\leqslant 2^{\omega}$ 的局部连通的正规空间,$\mathscr{U}=\{U_n:n<\omega\}$是开集族,使得每个 U_n 的边界 ∂U_n 是 Lindelöf 的,则 $\partial(\bigcup\mathscr{U})$是$\aleph_1$紧的．□

3.1.16 定理($2^{\omega}<2^{\omega_1}+2^{\omega_1}<2^{\omega_2}$) 设 X 是特征 $\leqslant 2^{\omega}$ 的连通,局部连通,边缘 Lindelöf 的正规次亚 Lindelöf 空间,则 X 是 Lindelöf 的．□

3.1.17 定理($2^{\omega}<2^{\omega_1}<2^{\omega_2}$) 设 X 是特征 $\leqslant 2^{\omega}$ 的局部连通,边缘 Lindelöf 的正规次亚 Lindelöf 空间,则 X 是 Lindelöf 空间的拓扑和,从而是强仿紧的．□

3.1.18 定理($2^{\omega}<2^{\omega_1}$) 设 X 是连通,局部连通,边缘 Lindelöf 的正规次亚 Lindelöf 空间,$\chi(X)\leqslant 2^{\omega}$,$t(X)\leqslant\omega$,则 X 是 Lindelöf 的．□

3.1.19 定理($2^{\omega}<2^{\omega_1}$) 局部连通,边缘 Lindelöf 的正规 Moore 空间是强仿紧可度量空间．□

§2 Q 集及其应用

3.2.1 定义 一个势 $>\omega$ 的可分度量空间,它的每个子集都是 G_δ 集(F_σ 集),则称它为 Q 集．□

通常我们所说的 Q 集往往都是指 $\mathbf{R}$ 中满足上述条件的子集,其实这二者的差别并不是本质的,因为有下面定理.

3.2.2 定理 若存在一个 Q 集,则在 $\mathbf{R}$ 中存在 Q 集．

证明 设 X 是任意一个 Q 集,这时 X 有可数基,于是 X 可以嵌入 I^{ω}. 不失普遍性,可以假定 $X\subset I^{\omega}$. I^{ω}是紧度量空间,它是 Cantor 集 C 的连续像．设 $f:C\to I^{\omega}$. 对每个 $x\in X$,取 $t_x\in C$,使 $x=f(t_x)$. 记

$E=\{t_x:x\in X\}$, $f\restriction_E$ 是 E 到 X 上的一一映射, $|E|>\omega$. 对任意子集 $A\subset E$, 记 $M=f(A)$, 由于 X 是 Q 集, 存在 I^ω 中的开集序列 $\{G_n:n<\omega\}$, 使 $M=\bigcap_n(G_n\cap X)$. 这时显然有 $A=f^{-1}(M)\cap E=[\bigcap_n f^{-1}(G_n)\cap E]\cap E$, 即 A 是 E 中的 G_δ 集. 这说明 E 是 $\mathbf{R}$ 中的 Q 集. □

关于 Q 集的意义体现在下面的一个重要定理上.

3.2.3 定理 存在不可度量的正规可分 Moore 空间的充要条件是存在 $\mathbf{R}$ 中的一个 Q 集. (Heath[1964])

证明 (1) 充分性. 设 $B\subset\mathbf{R}$ 是一个 Q 集. 我们取 Niemytski 上半平面的一个子空间 $M(B)$. 它由上半平面 $\{(x,y):y>0,x\in\mathbf{R}\}$ 和 $\{(x,0):x\in B\}$ 构成. 这是一个可分的 Moore 空间. 因为 $|B|>\omega$, 所以 $M(B)$ 有不可数的闭离散集, 于是 $M(B)$ 是不可度量的. 余下要证的是 $M(B)$ 的正规性. 任取 $F\subset B$, 记 $H=B-F$, F, H 相对于 B 是 F_σ 集, 于是存在 OX 轴上的上升闭集序列 $\{F_n\}$, $\{H_n\}$, 使 $F=\bigcup_n(F_n\cap B)$, $H=\bigcup_n(H_n\cap B)$. 对每个 n 和 $y\in H_n\cap B$, 取 $(y,0)$ 的直径为 1 的泡泡 (bubble, 即 $\{(y,0)\}\cup$ 与 OX 轴相切于点 $(y,0)$ 的直径为 1 的开圆). 记 V_n 为所有这些泡泡之并, 于是 $H_n\subset V_n$, $F\cap\overline{V_n}=\varnothing$. 对 F_n 作同样的 U_n, 使 $F_n\subset U_n$, $H\cap\overline{U_n}=\varnothing$. 现在令 $U=\bigcup_n(U_n-\bigcup_{j=1}^n\overline{V_j})$, $V=\bigcup_n(V_n-\bigcup_{j=1}^n\overline{U_j})$, 则 U, V 是分离 F, H 的 $M(B)$ 的互斥开集. 由此就可以证明 $M(B)$ 是正规的.

(2) 必要性. 假设 S 是一个不可度量的可分正规 Moore 空间. 这时 S 必包含有一个不可数的闭离散集 D. 取 S 的一个可数稠密集 $\{S_n:n<\omega\}$. 由 S 的第一可数性, $\forall x\in D$, $\exists$ 收敛于 x 的子序列 $\gamma(x)$, 即存在 $f_x\in{}^\omega\omega$, 使 $\{S_{f_x(n)}:n<\omega\}\to x$. 现在对 ${}^\omega\omega$ 取字典式的序 $\leqslant$, 则序拓扑空间 $({}^\omega\omega,\leqslant)$ 是可分的. 例如, $\{f\in{}^\omega\omega:|\omega-f^{-1}(0)|<\omega\}$ 就是一个可数稠密集. 这样, $({}^\omega\omega,\leqslant)$ 就序同构于 $\mathbf{R}$ 的某个子集, 特别存在 $L=\{f_x:x\in D\}$ 到 $\mathbf{R}$ 内的一个序嵌入 φ (因而也是同胚). 利用 $\mathbf{R}$ 的第二可数性, 不难证明, $\mathbf{R}$ 的任何一个不可数子集 A 都包含有一个不可数子集 B, 使得 $\forall x,y\in B$, $x<y$, 有 $|(x,y)\cap B|>\omega$. (提示: $C=\{x\in A:$

$\exists \epsilon>0, |[x,x+\epsilon)\cap A|\leqslant\omega\}$是可数集，$B=A-C$.）所以 L 包含一个不可数子集 L_1，使得当 $f_x, f_y\in L_1, f_x<f_y$ 时，有 $(f_x,f_y)\cap L_1$ 是不可数的.

现在证明存在 D 的不可数子集 D_0，使得对每个 n 和 $x\in D_0$，存在 $y,z\in D_0$，满足条件 $f_y<f_x<f_z$，并且 $\forall i\leqslant n, f_x(i)=f_y(i)=f_z(i)$. 证明如下：记 $P_n=\{x\in D:\neg\ \exists f_y\in L_1$，使 $f_y<f_x$，而 $\forall i\leqslant n, f_x(i)=f_y(i)$，同时 $\exists f_y\in L_1, f_y<f_x$，而 $f_x\restriction_n=f_y\restriction_n\}$. 这样，若 $x,y\in P_n$，则 $f_x\restriction_{n+1}\neq f_y\restriction_{n+1}$. 这就表明 P_n 是可数的，从而 $P=\bigcup_n P_n$ 也是可数的. 类似地，记 $F_n=\{x\in D:\neg\ \exists f_y\in L_1-f(P)$，使 $f_y>f_x$，而 $f_x\restriction_{n+1}=f_y\restriction_{n+1}$，同时 $\exists f_y\in L_1, f_y>f_x, f_x\restriction_n=f_y\restriction_n\}$，$F=\bigcup_n F_n$，则 F 也是可数的. 设 $D_1\subset D$，使 $f(D_1)=L_1$，记 $D_0=D_1-P-F$，则 D_0 为所求. 因为若 $x\in D_0$，则对每个 n，$x\notin P_n\cup F_n$. 于是存在 f_y 和 $f_z\in L_1$，使 $f_y<f_x<f_z$，并且 $f_x\restriction_{n+1}=f_y\restriction_{n+1}=f_z\restriction_{n+1}$. 由于 $L_1\cap(f_y,f_x)$ 和 $L_1\cap(f_x,f_z)$ 是不可数的，而 $f(P_n)\cup f(F_n)$ 是可数的，因此存在 $y_0,z_0\in D_0$，使 $f_y<f_{y_0}<f_x<f_{z_0}<f_z$. 显然有 $f_{y_0}\restriction_{n+1}=f_x\restriction_{n+1}=f_{z_0}\restriction_{n+1}$，即 $\forall i\leqslant n, f_{y_0}(i)=f_x(i)=f_{z_0}(i)$.

记 $L_0=f(D_0)=\{f_x: x\in D_0\}$. 设 $H\subset D_0$ 是任一子集. 因为 D_0 是闭离散集，可知 H, D_0-H 是 S 中的闭集. S 是正规空间，存在开集 U，使 $H\subset U\subset\overline{U}\subset S-(D_0-H)$. 注意，若 $x\in H$，由于有 $\gamma(x)=\{S_{f_x(n)}: n<\omega\}\to x$，存在 n，对所有 $i>n$，$S_{f_x(i)}\in U$. 令 $H_n=\{x\in H:\forall i>n, S_{f_x(i)}\in U\}$，则 $H=\bigcup_n H_n$，于是 $f(H)=\bigcup_n f(H_n)$. 下面我们证明 $f(H)=\bigcup_n\overline{f(H_n)}$，从而 $f(H)$ 是一个 F_σ 集. 由此就可推得 $f(D_0)$ 是 Q 集.

假设 $x\in D_0$，并且 $f_x\in\overline{f(H_n)}$，则 $\forall m, \exists y,z\in D_0$，使 $f_y<f_x<f_z$，并且有 $f_x\restriction_{m+n+1}=f_y\restriction_{m+n+1}=f_z\restriction_{m+n+1}$. (f_y,f_z) 是 f_x 的邻域，所以存在 $u_m\in H_n$，使 $f_{u_m}\in(f_y,f_z)$. 从而 $f_{u_m}\restriction_{m+n+1}=f_x\restriction_{m+n+1}$. 由 $u_m\in H_n$ 的定义有 $S_{f_{u_m}}(m+n)=S_{f_x}(m+n)\in U$. 但 $\{S_{f_x(n)}: n<\omega\}\to x$，所以 $x\in\overline{U}$. 但 $\overline{U}\cap D_0=H$，于是 $x\in H$. 这表明 $\bigcup_n\overline{f(H_n)}=f(H)$. □

由上述定理及定理 3.1.7，立即可以看出，存在 Q 集 $\Rightarrow 2^{\omega_1}=2^{\omega}$（即弱连续统假设不能成立）. 另外也可以看出，任何一个 Q 集的势必定小

于 2^{ω}. 因为若 X 是个 Q 集，由于 $w(X)=\omega$，所以 X 至多有 2^{ω} 个 G_δ 集 . X 每个子集都是 G_δ 集，于是 $|\mathscr{P}(X)|\leqslant 2^{\omega}$. 故 $|X|\geqslant 2^{\omega}$ 不能成立 .

由 MA + ┐CH 可以推出 Q 集的存在性 .

3.2.4 定理(Silver) $P(c)\Rightarrow\mathbf{R}$ 的任何一个势 $<c$ 的不可数子集 X 都是 Q 集 .

证明 取 $\mathbf{R}$ 的一个可数基 $\{U_n:n<\omega\}$，使得 $\forall x,y\in\mathbf{R},x\neq y$，有 $|\{n:x\in U_n,y\in U_n\}|<\omega$（例如，取 $\left\{\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right):n\in\mathbf{N},k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\left(\sqrt{2}+\frac{k}{2^n},\sqrt{2}+\frac{k+1}{2^n}\right):n\in\mathbf{N},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$\mathbf{Z}$ 为整数集）. 对任意 $A\subset X$，记 $B=X-A$，$\forall x\in X$，记 $N_x=\{n:x\in U_n\}$，$\mathscr{A}=\{N_x:x\in A\}$，$\mathscr{B}=\{N_x:x\in B\}$，则 $|\mathscr{A}|<c$，$|\mathscr{B}|<c$，并且 $\forall x\in A,y_1,\cdots,y_n\in B$，$N_x\cap(N_{y_1}\cup\cdots\cup N_{y_n})$ 是有限的，即 $N_x-(\bigcup_{i=1}^{n}N_{y_i})$ 是无限集 . 由 $P(c)$ 得出存在 $M\subset\omega$，使得 $\forall x\in A$，$|N_x\cap M|=\omega$，$\forall y\in B$，$|N_y\cap M|<\omega$. 令 $G_n=\bigcup\{U_k:k\in M,k\geqslant n\}$，则 $A\subset G_n$，并且 $(\bigcap_n G_n)\cap B=\varnothing$. 于是 $\bigcap_n(G_n\cap X)=A$，A 是相对 G_δ 集 . □

因为 $2^{\omega}<2^{\omega_1}$ 蕴涵不存在 Q 集，所以 Q 集的存在性以及可分正规 Moore 空间的可度量性都是独立于 ZFC 的 .

通过更为精细一些的论证，Fleissner 和 Reed[1977]证明了下面定理.

3.2.5 定理(MA) 设 X 是势 $<c$ 的有 σ-点有限基的 T_1 空间，则 X 的每个子集都是 G_δ 集 . □

定理 3.2.3 中的空间 $M(B)$ 是不可度量正规可分 Moore 空间的一个典型例子，通常也称它为泡泡空间(bubble Space). 这是一个局部连通和连通的空间，但它不是局部紧的 . 利用 Q 集，我们还可以构造局部紧的可分不可度量的正规 Moore 空间 .

设 α 是个序数，A 是一个非空集，记 ${}^{\alpha}A=\{f:f$ 是函数，$\mathrm{dom}\,f=\alpha$，$\mathrm{ran}\,f\subset A\}$. 又记 ${}^{\underline{\alpha}}A=\bigcup\{{}^{\beta}A:\beta<\alpha\}$. 设 $f,g\in{}^{\underline{\alpha}}A$，定义 $f\leqslant g$ 当且仅当 $f\subset g$，即 $g\restriction_{\mathrm{dom}\,f}=f$. 这时 $({}^{\underline{\alpha}}A,\leqslant)$ 就是一个高度为 α 的树 . 特别

地，$T={}^{\omega+1}2$ 称为 Cantor(二进)树．易见 $|\mathrm{Lev}_n T|=2^n$. 所以 $T-\mathrm{Lev}_\omega T$ 是可数的，$|\mathrm{Lev}_\omega T|=2^\omega$. T 的树拓扑是一个可分的 Moore 空间．$\mathrm{Lev}_\omega T$ 是势为 c 的闭离散集，而 $T-\mathrm{Lev}_\omega T$ 是可数开稠密集．此外 T 也不是正规的．

对任意 $x\in{}^\omega 2=\mathrm{Lev}_\omega T$，令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}x(n)$，则 f 是 ${}^\omega 2$ 与 Cantor 集 C 之间的一个一一对应．今后我们迳直把 $\mathrm{Lev}_\omega T$ 与 C 等同起来．注意，当 $x\in C$ 时，$\forall n$，$[x\restriction_n, x]$ 是 x 的一个紧邻域，所以 T 是局部紧的．

3.2.6 定理($\exists\, Q$ 集) *存在局部紧，可分，不可度量的正规 Moore 空间．*

证明 设 $Q\subset\mathbf{R}$ 是一个 Q 集，则 $|Q|<2^\omega$. 因为 $\mathbf{R}$ 中任何一个势 $<c$ 的子空间都是 0 维的，而 0 维可分度量空间都可以嵌入 Cantor 集 C，所以 Q 的嵌入像 E 仍是一个 Q 集．记 $X=T-(C-E)$，则 X 是 T 的一个子空间．它是可分，局部紧，不可度量的 Moore 空间(因为 X 包含有势为不可数的闭离散集). 下面证明它的正规性．由于 $T-C$ 的每个点都是孤立点，只需验证对任何 $A\subset E$，A 与 $B=E-A$ 可以分离. E 是 Q 集，存在 $\mathbf{R}$ 中的上升闭集列 $\{F_n\}_n$ 与 $\{K_n\}_n$，使 $A=\bigcup_n(F_n\cap E)$，$B=\bigcup_n(K_n\cap E)$. 记 $A_n=F_n\cap E$，$B_n=K_n\cap E$，$\forall x\in A_n$，取 $V_n(x)=(x\restriction_n, x]$，记 $V_n=\bigcup\{V_n(x):x\in A_n\}$，则 $\forall y\in B$，由于 $d(y,F_n)>0$(d 表示 Cantor 集 C 中的度量)，这时必存在 m，使 $(y\restriction_m, y]\cap V_n=\varnothing$. 否则将有无限个 $k\in\mathbf{N}$，使 $y\restriction_k=x\restriction_k$(其中 $x_k\in A_n$). 于是 $d(y,A_n)\leqslant d(x,y)\leqslant 2\left(\frac{2}{3}\right)^k$. 这当然是不可能的，所以 $\overline{V_n}\cap B=\varnothing$. 类似地可以作出 U_n，使 $B_n\subset U_n$，$\overline{U_n}\cap A=\varnothing$. 最后令 $V=\bigcup_n\left(V_n-\bigcup_{j=1}^{n}\overline{U_j}\right)$，$U=\bigcup_n\left(U_n-\bigcup_{j=1}^{n}\overline{V_j}\right)$，则 U，V 就是分离 A，B 的不相交开集． □

下面是一个正规，亚紧，不可度量的 Moore 空间的例子．

3.2.7 定理($\exists\, Q$ 集) *存在正规，亚紧，不可度量的 Moore 空间．*

证明 首先给出 Heath V 空间 S 的构造．它的装备集是上半平面

和 OX 轴．规定上半平面的点都是孤立点．在 $p=(x_0,0)$ 处，取 $\{V_n(p):n\in\mathbf{N}\}$ 作为 p 的邻域基，其中 $V_n(p)$ 是以 p 为顶点，斜率为 ±1，高为 $\frac{1}{n}$ 的 V 形线段，即 $V_n(p)=\left\{(x,y):y=\pm(x-x_0),0\leqslant y\leqslant\frac{1}{n}\right\}$．容易验证，$S$ 是一个 Moore 空间．S 的每个开覆盖都有一个开加细 $\mathscr{H}$，使得 $\forall p\in S,\mathrm{ord}(p,\mathscr{H})\leqslant2$，所以 S 是亚紧的．现在设 E 是 OX 轴上的一个 Q 集，则 $S(E)=\{(x,y):y>0\}\cup\{(x,0):x\in E\}$ 是一个亚紧的正规 Moore 空间．我们来证明它不是 CWH 的．E 是一个闭离散集，设 $\{V(p):p\in E\}$ 是任意一个由基本邻域组成的开集族．记 $E_n=\{p:V(p)=V_n(p)\}$，则 $E=\bigcup_n E_n$．于是存在 n，使 E_n 是不可数的．作为直线点集，E_n 一定有凝聚点．于是存在 $p_1,p_2\in E,p_i=(x_i,0)$，使 $|x_1-x_2|<\frac{1}{n}$．这时 $V_n(p_1)\cap V_n(p_2)\neq\varnothing$．于是 $\{V(p):p\in E\}$ 不可能是互斥开集族．因为 $S(E)$ 不是 CWH 的，所以它不可度量． □

由于正则亚紧的可分空间是 Lindelöf 的，因此可分亚紧 Moore 空间必然是可度量的．实际上，每个可分的亚 Lindelöf Moore 空间都是可度量的．但是在承认 Q 集存在的前提下，我们可以证明存在不可度量的亚紧 CCC Moore 空间，不过这时需要用到强 Q 集的概念来构造这样的例子．

3.2.8 定义 X 称为强 Q 集，如果对任何自然数 n，X^n 都是 Q 集． □

3.2.9 定理 若 $\mathbf{R}$ 中存在强 Q 集，则存在亚紧 CCC，不可分的正规 Moore 空间．(从而它也是不可度量的，因为在可度量空间中，CCC 与可分性是等价的．)

证明 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中一个强 Q 集．记 $X=[S]^{<\omega}$，并赋以 Pixley-Roy 拓扑．因为 S 是第一可数的，所以对每个 $x\in X$，存在 x 在 S 中的下降邻域基 $\{U_n(x):n<\omega\}$．对每个 n，定义

$$\mathscr{G}_n=\{[x,U_n(x)]:x\in X\},$$

则 $\{\mathscr{G}_n:n<\omega\}$ 就是 X 的一个展开．实际上，设 U 是 S 中包含 x 的任意开集，存在 $n(x)$，使 $U_{n(x)}(x)\subset U$，从而 $[x,U_{n(x)}(x)]\subset[x,U]$．对 x

的任一非空真子集y,存在 $n(y)$,使 $x \not\subset U_{n(y)}(y)$. 令 $n=\max\{n(y):\varnothing \neq y \subset x\}$,则 $x \not\subset U_n(y)$对所有$\varnothing \neq y \subset x$ 都成立. 因此有 $\mathrm{St}(x,\mathscr{G}_n)=[x,U_n(x)]\subset[x,u]$. 这就证明了 X 是 Moore 空间.

X 又是亚紧的,因为它的任何开覆盖都有形如 $\mathscr{U}=\{[x,U(x)]:x\in X\}$的开加细,其中 $U(x)$是 S 中包含 x 的开集. 注意 $y\in[x,U(x)]$当且仅当 $x\subset y,|y|<\omega,y\subset U(x)$,而$\{x:x\subset y\}$是有限集,所以 $\mathscr{U}$是点有限的.

S 是可分度量空间,它有可数基$\{U_n:n<\omega\}$. 设它对有限并是封闭的. 假设 $\mathscr{G}$是 X 的一个不可数开集族,其每个成员都有$[x,U_n]$的形式,这时必存在 $U=U_n$ 和不可数个 $x_\alpha(\alpha<\omega_1)$,使$\{[x_\alpha,U]:\alpha<\omega_1\}\subset\mathscr{G}$. 这时对任意 α,β,有 $x_\alpha\cup x_\beta\subset U$. 于是 $x_\alpha\cup x_\beta\in[x_\alpha,U]\cap[x_\beta,U]$. 所以 $\mathscr{G}$不是互斥的. 这证明了 X 是 CCC 空间.

再则,若$\{x_n:n<\omega\}\subset X$,则$\bigcup_n x_n$ 是S 的可数子集. 此时取 $s\in S-\bigcup_n X_n$,则$\forall x_n,x_n\notin[\{s\},S]$. 所以$\{x_n:n<\omega\}$不是稠密的,即 X 不是可分的.

最后我们证明 X 的正规性. 为了方便,对于 $x\in X$ 和 $r>0$,记 $U(x,r)=[x,\bigcup\{(s-r,s+r):s\in x\}]$. 易见$\{U(x,r):r>0\}$构成 x 在X 中的一个邻域基. 现在设 U 是X 中的任意一个开集,我们证明存在开集序列$\{U_n\}$,使 $U=\bigcup_n U_n=\bigcup_n \overline{U_n}$. 而这将导致 X 的全正规性(见 Engelking[1977]第 73 页 1.5.K).

对 $x\in U$,取 $\mu(x)>0$,使 $U\left(x,\frac{1}{\mu(x)}\right)\subset U$. 设 $\rho(x)=\min\{|x_i-x_j|:x_i,x_j\in x,i\neq j\}$,又设 $A_{nm}=\left\{x\in U:|x|=n,\mu(x)\leqslant m,\rho(x)\geqslant\frac{1}{m}\right\}$,则 $U=\bigcup_n\bigcup_m A_{nm}$. 现在把每个 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$看做乘积空间 S^n 中的一个点$(x_1<x_2<\cdots<x_n)$,于是 A_{nm}可看做S^n 的一个子集. 由于 S^n 是Q集,因此存在 S^n 中可数个闭集$\{F_{nmk}\}_k$,使 $A_{nm}=\bigcup_k F_{nmk}$. 设 $V_{nmk}=\bigcup\left\{U\left(x,\frac{1}{2m}\right):x\in F_{nmk}\right\}$. 因为$\frac{1}{2m}<\frac{1}{m}\leqslant\frac{1}{\mu(x)}$,所以 $V_{nmk}\subset U$. 于是 $U=\bigcup_n\bigcup_m\bigcup_k V_{nmk}$. 现在只需证明 $\overline{V}_{nmk}\subset U$ 即可.

设 $Z=\{z_1,\cdots,z_\gamma\}\in\overline{V}_{nmk}$. 这时 $\forall p\in\mathbf{N}$, $\exists t^p\in X$ 和 $x^p\in F_{nmk}$, 使 $t^p\in U\left(z,\frac{1}{p}\right)\cap U\left(x^p,\frac{1}{2m}\right)$. 于是 $t^p\subset B\left(z,\frac{1}{p}\right)\cap B\left(x^p,\frac{1}{2m}\right)$（此处 $B(z,\varepsilon)=\bigcup\{(z_i-\varepsilon,z_i+\varepsilon):z_i\in z\}$），并且 $t^p\supset z\cup x^p$. 因此有 $z\cup x^p\subset B\left(z,\frac{1}{p}\right)\cap B\left(x^p,\frac{1}{2m}\right)$.

对每个 p，存在 $i_1(p)$，使 $|x_1^p-z_{i_1(p)}|<\frac{1}{p}$. 因为 z 是有限集，存在 i_1 和 $P_1\in[\mathbf{N}]^\omega$，使得对所有 $p\in P_1$，$\left|x_1^p-z_{i_1}\right|<\frac{1}{p}$. 继续推证，存在 i_2 和无限的 $P_2\subset P_1$，使得对所有 $p\in P_2$，$\left|x_2^p-z_{i_2}\right|<\frac{1}{p}$. 最后得出 $i_1,\cdots,i_n$ 和无限的 P_n，使得对所有 $j\leqslant n$ 和 $p\in P_n$，有 $\left|x_j^p-z_{ij}\right|<\frac{1}{p}$. 注意 $|x_j^p-x_{j'}^p|\geqslant\rho(x^p)\geqslant\frac{1}{m}$，$P_n$ 是无限集，所以 $j\neq j'\Rightarrow\left|z_{i_j}-z_{i_{j'}}\right|\geqslant\frac{1}{m}$. 因而不妨设 $z_{i_1}<z_{i_2}<\cdots<z_{i_n}$，令 $z'=\{z_{i_1},\cdots,z_{i_n}\}\subset z$，则 $z'\in F_{nmk}$. 不然的话，就会有 $\varepsilon>0$，使 $(\prod_{j=1}^{n}B(\{z_{ij}\},\varepsilon))\cap F_{nmk}=\varnothing$，而这是不可能的. 因为 $z'\in F_{nmk}$，所以 $U\left(z',\frac{1}{m}\right)\subset U$. 任取 $y\in z$ 和 $p\in P_n$，使 $\frac{1}{p}<\frac{1}{2m}$，则 $y\in B\left(x^p,\frac{1}{2m}\right)$. 于是 $|y-z_{ij}|<\frac{1}{m}$. y 是任意的，所以 $z\subset B\left(z',\frac{1}{m}\right)\subset U$，即 $\overline{V}_{nmk}\subset U$. □

现在转到强 Q 集存在性的问题. 由定理 3.2.5 立即可得：

3.2.10 定理（MA + ┐ CH） **R** 中任何一个势 $<c$ 的不可数集都是强 Q 集. □

对定理 3.2.4 中 Silver 定理的论证稍作修改，就可证明对任何 n，$\mathbf{R}^n$ 中的势 $<c$ 的不可数子集都是 Q 集. 因而定理 3.2.10 的结论只用 $P(c)$ 即可推得. 更进一步的研究指出，强 Q 集的存在与 Q 集的存在实际上是等价的，这便是 Przymusinski 的下述结果（Przymusinski [1980c]）.

3.2.11 定理 下列各个命题是等价的：

(1) 存在 Q 集.

(2) 存在强 Q 集 .

(3) $2^{\omega}=2^{\omega_1}$,并且 $\forall A\subset \mathbf{R}\times\omega_1$, $\exists \mathbf{R}$ 的一个可分度量 ρ 和 ω_1 的一个可分度量 σ,使得 A 是 $(\mathbf{R},\rho)\times(\omega_1,\sigma)$ 中的 F_σ 集 .

(4) $2^{\omega}=2^{\omega_1}$,并且 $\forall \mathscr{A}\subset\mathscr{P}(\mathbf{R})$, $|\mathscr{A}|=\omega_1$, $\exists \mathbf{R}$ 的可分度量 ρ,使得 $\forall A\in\mathscr{A}$, A 都是 $(\mathbf{R},\rho)$ 的 F_σ 集 .

(5) $2^{\omega}=2^{\omega_1}$,并且 $\forall n<\omega$ 和 $\mathbf{R}\times\omega_1^n$ 的每个子集 A,存在 $\mathbf{R}$ 的可分度量 ρ 和 ω_1 的可分度量 σ,使得 A 是 $(\mathbf{R},\rho)\times(\omega_1,\sigma)^n$ 中的 F_σ 集 .

(6) $2^{\omega}=2^{\omega_1}$,并且 $\forall \mathscr{A}\subset\mathscr{P}(\mathbf{R}\times\omega_1^n)$, $|\mathscr{A}|=\omega_1$,存在 $\mathbf{R}$ 的可分度量 ρ 和 ω_1 的可分度量 σ,使得 $\forall A\in\mathscr{A}$, A 是 $(\mathbf{R},\rho)\times(\omega_1,\sigma)^n$ 中的 F_σ 集 .

证明 (2)⇒(1)是显然的 .

(1)⇒(3). 先证一个引理 .

引理 设 $A\subset X\times Y$, $|Y|\leqslant c$, ρ 是 X 的一个可分度量,则 $\forall y\in Y$, $A_y=\{x:(x,y)\in A\}$ 是 (x,ρ) 中的 F_σ 集 $\Leftrightarrow \exists Y$ 的可分度量 σ,使 A 是 $(X,\rho)\times(Y,\sigma)$ 中的 F_σ 集 .

证明 充分性是明显的 . 下面证明必要性 . $\forall y\in Y$,设 $X-A_y=\bigcap\limits_n G_{yn}$,其中 G_{yn} 是 (X,ρ) 中的开集 . 又设 $\{B_n:n\in\mathbf{N}\}$ 是 (X,ρ) 的一个基. 令 $C_{nm}=\{y\in Y:B_m\subset G_{yn}\}$. 易见 $(X\times Y)-A=\bigcap\limits_n\bigcap\limits_m(B_m\times C_{nm})$. 因为 $|Y|\leqslant c$,所以不妨设 $Y\subset\mathbf{R}$. Y 作为 $\mathbf{R}$ 的子空间是可分度量空间 . 取它的一个基 $\{U_n:n\in\mathbf{N}\}$,以 $\{U_n:n\in\mathbf{N}\}\cup\{C_{nm}:n,m\in\mathbf{N}\}$ 为子基生成 Y 的一个新的度量 σ,则 C_{nm} 都是 (Y,σ) 中的开集 . 于是 $X\times Y-A$ 是 $(X,\rho)\times(Y,\sigma)$ 中的 G_δ 集,即 A 为 F_σ 集 . 引理得证 .

现在设 σ 是 ω_1 的一个可分度量拓扑,使得 (ω_1,σ) 是一个 Q 集 . 这时, $\forall A\subset\mathbf{R}\times\omega_1$, $\forall x\in\mathbf{R}$, $A_x=\{y:(x,y)\in A\}$ 是 (ω_1,σ) 中的 F_σ 集 . 由引理的结论,存在 $\mathbf{R}$ 的可分度量 ρ,使 A 是 $(\mathbf{R},\rho)\times(\omega_1,\sigma)$ 中的 F_σ 集 .

(3)⇒(4). 设 $\mathscr{A}=\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$. 令 $A=\bigcup\{A_\alpha\times\{\alpha\}:\alpha<\omega_1\}\subset\mathbf{R}\times\omega_1$. 由(3),存在可分度量 ρ,σ,使 A 是 $(\mathbf{R},\rho)\times(\omega_1,\sigma)$ 中的 F_σ 集 . 因此 A 的每个截口,即 A_α 都是 $(\mathbf{R},\rho)$ 中的 F_σ 集 .

(4)⇒(5). 为了简单,只就 $n=2$ 的情况证明, $n>2$ 时可归纳地论证 .

设 $A \subset \mathbf{R} \times (\omega_1 \times \omega_1)$. 令 $B = \{(r, \alpha, \beta) \in A : \alpha \leqslant \beta\}$, $C = \{(r, \alpha, \beta) \in A : \alpha > \beta\}$. 从假设的对称性和 $A = B \cup C$ 的事实,不妨假定 $A = B$. 对每个 $\beta < \omega_1$, 令 $A_\beta = \{(r, \alpha) \in \mathbf{R} \times \omega_1 : (r, \alpha, \beta) \in A\}$. 由引理,只需证明存在可分度量 ρ, σ, 使所有的 A_β 都是 $(\mathbf{R}, \rho) \times (\omega_1, \sigma)$ 中的 F_σ 集. 因为 $A_\beta \subset \mathbf{R} \times (\beta + 1)$, $A_\beta = \bigcup\{A_{\alpha\beta} \times \{\alpha\} : \alpha \leqslant \beta\}$ 是可数并,其中 $A_{\alpha\beta} = \{r \in \mathbf{R} : (r, \alpha) \in A_\beta\}$, 所以只需证明存在 $\mathbf{R}$ 的可分度量 ρ, 使所有的 $A_{\alpha\beta}$ 是 $(\mathbf{R}, \rho)$ 中的 F_σ 集即可. 但这由(4)就可推出.

(5)$\Rightarrow$(6). 设 $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. 令 $A = \bigcup\{A_\alpha \times \{\alpha\} : \alpha < \omega_1\} \subset (\mathbf{R} \times \omega_1^n) \times \omega_1 = \mathbf{R} \times \omega_1^{n+1}$, 并应用(5)即得.

(6)$\Rightarrow$(2). 对每个 $n < \omega$, 由 $2^\omega = 2^{\omega_1}$, 可将 $\mathscr{P}(\omega_1^n)$ 排列成 $\{A_r : r \in \mathbf{R}\}$. 令 $A = \bigcup\{\{r\} \times A_r : r \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R} \times \omega_1^n$. 由(6), 存在可分度量 ρ_n, σ_n, 使 A 是 $(\mathbf{R}, \rho_n) \times (\omega_1, \sigma_n)^n$ 中的 F_σ 集. 于是 $\forall A_r \subset \omega_1^n$, A_r 是 $(\omega_1, \sigma_n)^n$ 中的 F_σ 集, 即 $(\omega_1, \sigma_n)^n$ 是 Q 集. $\{\sigma_n : n \in \mathbf{N}\}$ 是 ω_1 的一个可分度量序列,考虑乘积空间 $\prod\{(\omega_1, \sigma_n) : n \in \mathbf{N}\}$ 的对角线 $\Delta = \{f_\alpha : \forall n \in \mathbf{N}, f_\alpha(n) = \alpha, \alpha < \omega_1\}$. Δ 作为乘积空间的子空间是一个可分度量空间. 设它的度量为 σ. $\forall n$, (Δ, σ) 到 (ω_1, σ_n) 上的映射 $f_\alpha \to \alpha$ 是连续一一映射, 所以 σ 比所有的 σ_n 强. 因此, 对每个 n, $A_r \subset \omega_1^n$, A_r 也是 $(\omega_1, \sigma)^n$ 中的 F_σ 集. 这就证明了 (ω_1, σ) 是一个强 Q 集. □

此外, Przymusinski[1978a]还证明了下述等价命题:

(1) $\exists Q$ 集.

(2) $\mathbf{R}^{\omega_1}$ 是一个第一可数可分空间的连续像.

(3) 每个势(或权) $= \omega_1$ 的空间都可以嵌入一个序列可分空间.

下面我们介绍 Wage 提供的一个机器. 通过这个机器, 当输进一个正规而不是族正规的空间时, 将产生一个正则但非正规的空间. 同时这个机器能保持许多有用的拓扑性质. 在承认存在 Q 集的前提下, 可以用它构造出一个可数仿紧的, 亚紧, 非正规的 Moore 空间. 换句话说, 它是一个有一致基的反 Dowker 空间.

3.2.12 定理 对任一正规, 非 CWN 的空间 X, 可以相应作出一个正则非正规的空间 X^*, 机器 $X \to X^*$ 保持下列各性质: (1) 可数仿

紧性;(2) Moore 性;(3) 第一可数性;(4) CWH 性;(5) 全(perfect)性;(6) 亚紧性;(7) ortho 紧性.(Wage[1976])

证明 设$\{H^{\alpha}:\alpha<\xi\}$是 X 的一个不可分离的离散闭集族,$H=\bigcup_{\alpha}H^{\alpha}$,$D=X-H$.令

$$X^{*}=[X\times\{0,1\}]\cup[D\times\{(\alpha,\beta):\alpha,\beta<\xi,\alpha\neq\beta\}].$$

引进两个记号:

(1) $\forall x\in X,\delta\in\{0,1\}$,记 $x_{\delta}=\{x\}\times\{\delta\}=(x,\delta)$.

(2) $\forall A\subset X,\delta\in\{0,1\}\cup\{(\alpha,\beta):\alpha,\beta<\xi,\alpha\neq\beta\}$,记 $A_{\delta}=(A\times\{\delta\})\cap X^{*}$.

规定:

(1) $X^{*}-(H_0\cup H_1)=D_0\cup D_1\cup D\times\{(\alpha,\beta):\alpha\neq\beta\}$中的每个点都是孤立点.

(2) 对每个开的 $U\subset D\cup H^{\alpha}=X-\bigcup\{H^{\beta}:\beta\neq\alpha\}$,规定

$$\bigcup\{U_{(\alpha,\lambda)}:\alpha\neq\lambda\}\cup U_0\quad(0\text{型}),$$
$$\bigcup\{U_{(\alpha,\lambda)}:\alpha\neq\lambda\}\cup U_1\quad(1\text{型})$$

都是 X^{*} 中的基本开集.

为了证明用此方式能生成 X^{*} 的一个拓扑,我们来验证它符合邻域公理.注意 0 型集与 X_1 不相交,1 型集与 X_0 不相交,所以不同型基本开集之交仅包含孤立点,而同一型的两个集之交仍是同一型的集.因此确实满足邻域公理.

正则性.设 x_0 是非孤立点,不妨设 $x_0\in H_0^{\alpha}$,又设 $x_0\in U_0\cup[\bigcup\{U_{(\alpha,\beta)}:\alpha\neq\beta\}]$. X 是正则的,取 X 中的开集 V,使 $x\in V\subset \mathrm{Cl}_X V\subset U$,则 $x_0\in V_0\cup[\bigcup\{V_{(\alpha,\beta)}:\alpha\neq\beta\}]$.我们来证明 $\mathrm{Cl}_{X^{*}}(V_0\cup[\bigcup\{V_{(\alpha,\beta)}:\alpha\neq\beta\}])\subset U_0\cup[\bigcup\{U_{(\alpha,\beta)}:\alpha\neq\beta\}]$.记 $\widetilde{U}=U_0\cup[\bigcup\{U_{(\alpha,\beta)}:\alpha\neq\beta\}]$,$\widetilde{V}=V_0\cup[\bigcup\{V_{(\alpha,\beta)}:\alpha\neq\beta\}]$.设 $y\in\widetilde{U}$,并且 y 不是孤立点.分两种情况:(1) $y\in\bigcup\{H^{\beta}:\beta\neq\alpha\}\times\{0,1\}$.注意 $U\cap[\bigcup\{H^{\beta}:\beta\neq\alpha\}]=\varnothing$,于是 $\overline{V}\cap[\bigcup\{H^{\beta}:\beta\neq\alpha\}]=\varnothing$.设 $y\in H^{\beta}\times\{0,1\}$,则存在 $W\subset D\cup H^{\beta}$,使 $W\cap V=\varnothing$.于是由 W 生成的基本开集

包含了 y 并且与 $\widetilde{U}$ 不相交．(2) $y\in H^{\alpha}\times\{0,1\}$．当 $y\in H^{\alpha}\times\{0\}$时，可以按类似(1)的情况处理；当 $y\in H^{\alpha}\times\{1\}$时，它有(1)型的基本邻域永远不与 $\widetilde{V}$ 相交．这样正则性得证．

非正规性．X_0 与 X_1 是不相交的闭集．假若 U,V 是分别包含 X_0 与 X_1 的开集，对任何 $A\subset X^*$，记 $\pi(A)=\{x\in X:\exists\delta=0$ 或 1，使$(x,\delta)\in A\}$．对任意 α，取包含 H_0^{α}和 H_1^{α}的基本开集 $U_{\alpha}\subset U$ 和 $V_{\alpha}\subset V$．不失普遍性，可设 $\pi(U_{\alpha})=\pi(V_{\alpha})$．由于$\{H^{\alpha}:\alpha<\xi\}$是不可分离的，存在 $\alpha,\beta,\alpha\neq\beta$，使 $\pi(U_{\alpha})\cap\pi(V_{\beta})\neq\varnothing$．于是$[\bigcup\{\pi(U_{\alpha})\times\{(\alpha,\lambda)\}:\alpha\neq\lambda\}]\cap[\bigcup\{\pi(V_{\beta})\times\{(\lambda,\beta)\}:\beta\neq\lambda\}]\supset[\pi(U_{\alpha})\times\{(\alpha,\beta)\}]\cap[\pi(V_{\beta})\times\{(\alpha,\beta)\}]\neq\varnothing$．这样就有 $U\cap V\neq\varnothing$．

可数仿紧性．设$\{F^n\}_n$ 是 X^* 中一个下降闭集序列，其交为$\varnothing$．因为 $D\times\{(\alpha,\beta):\alpha\neq\beta\}$中的点都是孤立点，所以不妨设 $F^0\subset X_0\cup X_1$．注意当 F^n是闭集时，$\pi(F^n)$也是 X 中的闭集．由 X 的可数仿紧性及 $\bigcap\{\pi(F^n):n<\omega\}=\varnothing$，存在 X 中的下降开集序列$\{U^n\}_n$，使 $U^n\supset\pi(F^n)$，并且$\bigcap_n\mathrm{Cl}_XU^n=\varnothing$．于是$\bigcap_n\pi^{-1}(U^n)=\varnothing$．而 $\pi^{-1}(U^n)$是 X^* 中包含 F^n 的开集，今证明 $\bigcap_n\mathrm{Cl}_{X^*}\pi^{-1}(U^n)=\varnothing$．若有点 x_0 属于 $\bigcap_n\mathrm{Cl}_{X^*}\pi^{-1}(U^n)$，则由$\bigcap_n\pi^{-1}(U^n)=\varnothing$，可知这个点不会是孤立点．不失普遍性，可设 $x_0\in H^{\alpha}\times\{0\}$．若 $x_0\in\mathrm{Cl}_{X^*}\pi^{-1}(U^n)$，则对 x 的任一X 邻域 $W\subset D\cup H^{\alpha}$，$W_0\cup[\bigcup\{W_{(\alpha,\lambda)}:\alpha\neq\lambda\}]$与 $\pi^{-1}(U^n)$有不空的交．从而 $\pi(W_0\cup[\bigcup\{W_{(\alpha,\lambda)}:\alpha\neq\lambda\}])=W$ 与$\pi(\pi^{-1}(U^n))=U^n$有不空的交．于是 $x\in\mathrm{Cl}_XU^n$．这说明$\bigcap_n\mathrm{Cl}_{X^*}\pi^{-1}(U^n)$必须是空集．

若$\{\mathscr{V}_n\}_n$是X 的一个展开，定义

$$\mathscr{U}_n=\{\{p\}:p\in H_0\cup H_1\}\cup\{\widetilde{V}_0:V\in\mathscr{V}_n\}\cup\{\widetilde{V}_1:V\in\mathscr{V}_n\},$$

其中
$$\widetilde{V}_0=V_0\cup[\bigcup\{V_{(\alpha,\lambda)}:\lambda\neq\alpha\}],$$
$$\widetilde{V}_1=V_1\cup[\bigcup\{V_{(\lambda,\alpha)}:\lambda\neq\alpha\}].$$

不难证明$\{\mathscr{U}_n\}_n$ 是X^*的一个展开．

(3)～(7)所述的性质均可以类似地论证． □

3.2.13 定理 $\exists Q$ 集，则存在亚紧 Moore 空间，它是可数仿紧而不是正规的．

证明 利用定理 3.2.9 构造的亚紧正规 Moore 空间 X(因为它不可度量，所以不是族正规的)作为定理 3.2.12 的输入，所产生的空间 X^* 即为所求． □

最后，我们介绍 Davis[1979]的一个结果以结束本节．

3.2.14 定理 $\neg\exists Q$ 集 $\Rightarrow \exists$ 势为 ω_1 的遗传正规，有 σ-互斥基的空间，它不是全的．

证明 任取 $\mathbf{R}$ 中一个势为 ω_1 的子集 X. 由假设，X 不是 Q 集．于是存在 X 的子集 W，它不是子空间 X 的 F_σ 集．现在作一个比原拓扑较细的拓扑 $\tau=\{G\cup K: G\subset X$ 是原开集，$K\subset W$ 是任意的$\}$，则 W 在 (X,τ) 中是由孤立点组成的开子空间，$X-W$ 是闭集．假若存在 $\{G_n: n<\omega\}$ 和 $\{K_n: n<\omega\}$，使 $X-W=\bigcap_n(G_n\cup K_n)$，则由 $K_n-W=\varnothing$，得出 $X-W=\bigcap_n G_n$. 这与 W 不是原拓扑空间 X 中的 F_σ 集的前提相矛盾，所以 (X,τ) 不是全的．又因为 X 的原拓扑是遗传正规的，有 σ-互斥基 $\mathscr{B}=\bigcup_n\mathscr{B}_n$，而 $\mathscr{B}\cup\{\{p\}: p\in W\}$ 是 (X,τ) 的一个 σ-互斥基，再则，注意在 $X-W$ 上，新、旧两种拓扑是一致的，而 W 在 (X,τ) 中是开的离散子空间，所以 (X,τ) 也是遗传正规的． □

§3 关于正规 Moore 空间猜想

早在拓扑学的草创时期，就已经出现了展开(development)和可展空间的概念雏形．20 世纪二三十年代，围绕着寻求拓扑空间度量化的条件的问题先后出现了一批有意义的成果，例如 Alexandroff 度量化定理，Urysohn 度量化定理，Moore 的度量化定理，等等．1933 年 Jones 正式提出了是否每个正规 Moore 空间都是可度量的问题．后来人们就把"每个正规 Moore 空间都是可度量的"这个命题称为正规 Moore 空间猜想(Normal Moore Space Conjecture，简称为 NMC)．从此，证实 NMC 或举

例否定 NMC 成了点集拓扑学的中心课题之一．到 20 世纪 60 年代前期，这个问题出现过几个重要的进展．

1. 1937 年 Jones 证明了：$2^{\omega} < 2^{\omega_1} \Rightarrow$ 每个可分正规 Moore 空间是可度量的．

2. 1950 年前后，Bing 等人证明了：族正规 Moore 空间或仿紧的 Moore 空间是可度量的，可遮的正规 Moore 空间是可度量的．

3. 1964 年 Heath 证明了：存在不可度量的可分正规 Moore 空间的充要条件是存在 Q 集．若存在不可度量的可分正规 Moore 空间，则也存在不可度量的正规亚紧 Moore 空间．

Heath 的结果与 Alexandroff 提出的一个问题有着密切联系．拓扑空间 X 的一个基 $\mathscr{B}$ 称为一致基（uniform base），如果对任意 x 和 $\mathscr{B}_x = \{B \in \mathscr{B}: x \in B\}$ 的任一无限子集 $\{B_n: n < \omega\}$，$\{B_n: n < \omega\}$ 都是 x 的一个局部基．Alexandroff 的问题是：是否每个有一致基的正规空间都是可度量的？1964 年，Heath 证明了正则空间 X 有一致基的充要条件是 X 是亚紧 Moore 空间．Heath 的结果表明，如果 Q 集确实存在的话，那么 Alexandroff 问题的答案就是否定的．

进入 20 世纪 70 年代，由于集论取得了长足的进展，NMC 的研究也获得许多深刻的成果．首先，Con(ZFC + MA + ┐ CH) 的证明使 Q 集的存在有了理论上的合法依据，表明可分情况下的 NMC 是独立于 ZFC 的．1982 年，Watson 证明了 $\mathbf{V = L} \Rightarrow$ 每个局部紧正规的 θ 可加细空间是仿紧的（参看 Burke[1984a]8.7）．这样，$\mathbf{V = L} \Rightarrow$ 局部紧正规 Moore 空间是可度量的．由于 MA + ┐ CH $\Rightarrow \exists$ 不可度量的局部紧正规 Moore 空间（见3.2.6），说明在局部紧情况下的 NMC 也是独立于 ZFC 的．

鉴于许多不可度量的正规 Moore 空间的例子都是借助于 MA + ┐ CH构造出来的，人们也许会猜测借助于 CH 或者进一步借助于 $\mathbf{V = L}$ 有可能正面证实 NMC．但是这种努力是不会成功的，因为 1982 年，Fleissner[1982]指出运用 CH 也可以构造出一个不可度量的，亚紧正规 Moore 空间．

进入 20 世纪 80 年代以来的一个重大进展是 Nyikos[1980]取得的．他利用乘积测度扩张公理（PMEA，即 Product Measure Extension Axiom）证

明了所有的正规 Moore 空间都是可度量的.

设 $2=\{0,1\}$,并赋以测度 $m(\{0\})=m(\{1\})=\frac{1}{2}$.设 κ 是一基数,μ 是乘积空间 ${}^{\kappa}2$ 上按典型的方式生成的(Borel)乘积测度.

3.3.1 定义 记 $c=2^{\omega}$,集 X 上的一个测度 μ 称为 c 可加的,如果对 X 中任意一个互斥子集族 $\mathscr{A}$,当 $|\mathscr{A}|<c$ 时,有 $\mu(\bigcup\mathscr{A})=\sum\{\mu(A):A\in\mathscr{A}\}$. □

3.3.2 定义 PMEA 是指下列命题:对任何基数 λ,${}^{\lambda}2$ 上通常的乘积测度 μ 都可以扩张到 $\mathscr{P}({}^{\lambda}2)$上成为一个 c 可加的测度. □

3.3.3 定义 设 X 是拓扑空间,互斥集族 $\mathscr{C}=\{C_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$称为良好分离的,如果存在互斥开集族 $\mathscr{U}=\{U_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$,使得 $\forall\gamma\in\Gamma$, $C_\gamma\subset U_\gamma$. $\mathscr{C}$称为正规化的,如果 $\forall\Lambda\subset\Gamma$, $\exists$ 互斥开集 U,V,使得 $\bigcup\{C_\gamma:\gamma\in\Lambda\}\subset U$, $\bigcup\{C_\gamma:\gamma\in\Gamma-\Lambda\}\subset V$. □

容易看出,每个良好分离的集族都是正规化的.若 X 是正规空间,则每个离散族都是正规化的.X 是族正规的当且仅当每个离散族都是良好分离的.

3.3.4 定理(PMEA) 设 $\chi(X)<c$,则 X 中的每个正规化子集族 $\mathscr{C}=\{C_\gamma:\gamma<\lambda\}$都是良好分离的.(Nyikos[1980])

证明 设 μ 是由 ${}^{\lambda}2$ 上通常乘积测度扩张得到的 c 可加测度.对任意 $\alpha<\lambda$,记 $\mathscr{B}_\alpha=\{f\in{}^{\lambda}2:f(\alpha)=1\}$.注意 $\mu({}^{\lambda}2)=1$,又 $\alpha\neq\beta$ 时,$\mathscr{B}_\alpha-\mathscr{B}_\beta=\{f:f(\alpha)=1,f(\beta)=0\}$,从而 $\mu(\mathscr{B}_\alpha-\mathscr{B}_\beta)=\mu(\mathscr{B}_\alpha)\cdot(1-\mu(\mathscr{B}_\beta))=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.再者,每个 $f\in{}^{\lambda}2$ 都是 λ 的某个子集 A_f 的特征函数,即 $A_f=\{\alpha\in\lambda:f(\alpha)=1\}$.由于 $\mathscr{C}$是正规化的,因此对应有互斥的开集 U_{A_f},V_{A_f},使 $\bigcup\{C_\gamma:\gamma\in A_f\}\subset U_{A_f}$, $\bigcup\{C_\gamma:\gamma\in\lambda-A_f\}\subset V_{A_f}$.

对给定的 $\alpha\in\lambda$ 和 $p\in C_\alpha$,取定点 p 的一个局部基 $\{U_\gamma(p):\gamma<k_p\}$,其中 $k_p<c$ 是一个基数.令 $\mathscr{A}[p,\gamma]=\{f\in{}^{\lambda}2:U_\gamma(p)\subset U_{A_f}$或$U_\gamma(p)\subset V_{A_f}\}$.因为对任意 f 和 α,若 $\alpha\in A_f$,则 $p\in U_{A_f}$,若 $\alpha\notin A_f$,则 $p\in V_{A_f}$,在两种情况下都存在 γ,使 $U_\gamma(p)\subset U_{A_f}$(或 V_{A_f}).这时 $f\in$

$\mathscr{A}[p,\gamma]$,所以有$\bigcup\{\mathscr{A}[p,\gamma]:\gamma<k_p\}={}^{\lambda}2$.由于$\{\mathscr{A}[p,\gamma]:\gamma<k_p\}$是势$<c$的集族,其并为${}^{\lambda}2$.这说明$\{\mu(\bigcup\{\mathscr{A}[p,\gamma]:\gamma<\delta\}):\delta<k_p\}$是单调收敛于1的超限序列.由实数的阿基米得性质,必定存在有限个指标$\gamma_1(p),\cdots,\gamma_{n(p)}(p)$,使$\mu(\bigcup\{\mathscr{A}[p,\gamma_i(p)]:i=1,\cdots,n(p)\})>\frac{7}{8}$.取$\gamma_p$使$U_{\gamma(p)}\subset\bigcap_{i=1}^{n(p)}U_{\gamma_i(p)}(p)$,则对任意$f\in\mathscr{A}[p,\gamma_i(p)]$,有$f\in\mathscr{A}[p,\gamma_p]$.所以$\mu(\mathscr{A}[p,\gamma_p])>\frac{7}{8}$.

若对所有的$\alpha<\lambda$和所有的$p\in C_\alpha$都这样地作出$\mathscr{A}[p,\gamma_p]$,并把它简单地记为$\mathscr{A}(p)$,则对任意p,q,有

$$\begin{aligned}\mu(\mathscr{A}(p)\cap\mathscr{A}(q))&=\mu({}^{\lambda}2-[({}^{\lambda}2-\mathscr{A}(p))\cup({}^{\lambda}2-\mathscr{A}(q))])\\&=1-[1-\mu(\mathscr{A}(p))]-[1-\mu(\mathscr{A}(q))]\\&=\mu(\mathscr{A}(p))+\mu(\mathscr{A}(q))-1\\&\geqslant\frac{7}{8}+\frac{7}{8}-1=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

假设$p\in C_\alpha,q\in C_\beta$,而$\alpha\neq\beta$,由$\mu(\mathscr{B}_\alpha-\mathscr{B}_\beta)=\frac{1}{4}$,存在$f\in\mathscr{A}[p,\gamma_p]\cap\mathscr{A}[q,\gamma_q]\cap(\mathscr{B}_\alpha-\mathscr{B}_\beta)$.这时由$f(\alpha)=1,f(\beta)=0$,得$p\in U_{A_f},q\in V_{A_f}$.再由$f\in\mathscr{A}[p,\gamma_p]$,得到$U_{\gamma_p}(p)\subset U_{A_f}$.类似地有$U_{\gamma_q}(q)\subset V_{A_f}$.于是$U_{\gamma_p}(p)\cap U_{\gamma_q}(q)=\varnothing$.对每个$\alpha$,令

$$U_\alpha=\bigcup\{U_{\gamma_p}(p):p\in C_\alpha\},$$

则$\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha<\lambda\}$是互斥开集族,并且满足$C_\alpha\subset U_\alpha$.这就证明了$\{C_\alpha:\alpha<\lambda\}$是良好分离的. □

3.3.5 定理(PMEA) (1) 设$\chi(X)<c$,若X是正规空间,则X也是族正规的.

(2) 每个正规 Moore 空间都是可度量的.

(3) 每个有一致基的正规空间都是可度量的.(Nyikos[1980]) □

下面介绍的是 Burke[1984b]中的一个主要结果.他应用 PMEA 证明了第一可数,可数仿紧的次仿紧空间是仿紧的.作为推论,可以得出

每个可数仿紧的 Moore 空间都是可度量的．

先给出一个引理．

3.3.6 引理 设 A 是一个集，μ 是 ${}^A2$ 上的通常的乘积测度，$J_1, J_2, \cdots, J_n \in [A]^{<\omega}$，它们互不相交，并且对每个 i，$|J_i| = k$．若 $\varphi_i \in {}^{J_i}2$，$M_i = \{f \in {}^A2 : \varphi_i \subset f\}$，则当 $n \geqslant 2^{k-1}$ 时，有 $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} M_i) \geqslant \frac{3}{8}$．

证明 由 $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{2^{k-1}} \subset M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$．故不妨就 $n = 2^{k-1}$ 的情况证明即可．由假设可知对任何 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$，有 $\mu(M_i) = 2^{-k}$，$\mu(M_i \cap M_j) = 2^{-2k}$．注意

$$\mu(M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n) = \mu(M_1) + \mu(M_2 - M_1) + \mu(M_3 - (M_1 \cup M_2)) + \cdots + \mu(M_n - (M_1 \cup \cdots \cup M_{n-1})),$$

而
$$M_j - (M_1 \cup \cdots \cup M_{j-1}) = M_j - (M_1 \cup \cdots \cup M_{j-1}) \cap M_j = M_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} (M_i \cap M_j),$$

所以
$$\mu(M_j - \bigcup_{j=1}^{j-1} M_i) = \mu(M_j) - \mu(\bigcup_{i=1}^{j-1} (M_i \cap M_j)) \geqslant \mu(M_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \mu(M_i \cap M_j) = 2^{-k} - (j-1)2^{-2k}.$$

于是
$$\mu(M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n) \geqslant n2^{-k} - \sum_{j=1}^{n} (j-1)2^{-2k} = 2^{-1} - n(n-1)2^{-2k-1} > 2^{-1} - n^2 2^{-2k-1} = 2^{-1} - 2^{-3} = \frac{3}{8}.$$
□

3.3.7 定理(PMEA) 设 X 是第一可数的可数仿紧空间，$\mathscr{P} = \{P_\beta : \beta < \lambda\}$ 是离散闭集族，则典型开覆盖 $\{X - \bigcup\{P_\alpha : \alpha \neq \beta\} : \beta < \lambda\}$ 有一个开加细序列 $\{\mathscr{H}_m : m < \omega\}$，使得对任意 $x \in X$，存在 m 使 $\mathscr{H}_m$ 在 x 处局部有限．

证明 设 μ 是 ${}^{\omega\times\lambda}2$ 上通常的乘积测度到 $\mathscr{P}({}^{\omega\times\lambda}2)$ 上的扩张测度，$x \in X$．取 x 的一个下降局部基 $\{V_n(x) : n < \omega\}$．设 $f \in {}^{\omega\times\lambda}2$．令

$$A_{\omega f} = \{\beta \in \lambda : f(\gamma, \beta) = 0, \text{对所有 } \gamma < \omega\}.$$

对 $\alpha < \omega$，令

$$A_{\alpha f}=\{\beta\in\lambda: f(\alpha,\beta)=1,\text{并且}\ \forall\,\gamma<\alpha, f(\gamma,\beta)=0\}.$$

对 $\alpha\leqslant\omega$，令

$$W_{\alpha f}=X-\bigcup\{P_\beta:\beta<\lambda,\beta\in A_{\alpha f}\},$$

$$\mathscr{W}_f=\{W_{\alpha f}:\alpha\leqslant\omega\}.$$

从定义可验证 $\mathscr{W}_f$ 是 X 的开覆盖．设 $\mathscr{U}_f=\{U_{\alpha f}:\alpha\leqslant\omega\}$ 是 $\mathscr{W}_f$ 的按指标对应的局部有限开加细．对每个 $p\in\bigcup\mathscr{P}$ 和 $k\in\mathbf{N}$，令

$$D(k,p)=\{f\in{}^{\omega\times\lambda}2:\exists\,\alpha\leqslant\omega,\text{使}\ V_k(p)\subset U_{\alpha f}\}.$$

易见 $k\to\infty$ 时，$D(k,p)\uparrow{}^{\omega\times\lambda}2$. 于是存在 $k(n,p)\in\mathbf{N}$，使

$$\mu(D(k(n,p),p))\geqslant 1-1/(4n\cdot 2^{n^2}).\qquad (*)$$

而且我们还可以假定 $k(n,p)<k(n+1,p)$. 现在对 $\beta<\lambda$，令

$$H(n,\beta)=\bigcup\{V_{k(n,p)}(p):p\in P_\beta\},$$

$$\mathscr{H}_n=\{H(n,\beta):\beta<\lambda\}\cup\{X-\bigcup\mathscr{P}\},$$

则 $\mathscr{H}_n$ 是定理所述的典型开覆盖的一个开加细．

假若存在点 $x\in X$，使得对任何 n，$\operatorname{ord}(V_n(x),\mathscr{H}_n)\geqslant\omega$. 分别取不同的 $\beta_1,\beta_2,\cdots\in\lambda$，使 $V_i(x)\cap H(i,\beta_i)\neq\varnothing$．又选 $p_i\in P_{\beta_i}$，使

$$V_i(x)\cap V_{k(i,p_i)}(p_i)\neq\varnothing\quad(i\in\mathbf{N}).$$

注意，当 $r\leqslant k(i,p_i)$ 时，$V_i(x)\cap V_r(p_i)\neq\varnothing$. 令

$$B_n=\{f\in{}^{\omega\times\lambda}2:\operatorname{ord}(V_n(x),\mathscr{U}_f)\leqslant n\},$$

则 B_n 单调上升，并且 $\bigcup_n B_n={}^{\omega\times\lambda}2$. 于是存在 m，使 $\mu(B_m)>\frac{7}{8}$. 对任意 $j<\omega$，$i\leqslant m$，令

$$\gamma_{ji}=\beta_{j(m+1)+i},\ I_j=\{\gamma_{ji}:0\leqslant i\leqslant m\},$$

$M_j=\{f\in{}^{\omega\times\lambda}2:f(r,\gamma_{ji})=1$ 当且仅当对于 $0\leqslant r\leqslant m, 0\leqslant i\leqslant m$ 有 $r=i\}$.

M_j 是 ${}^{\omega\times\lambda}2$ 中的一个基本邻域，并且对任何 $f\in M_j$ 和 $0\leqslant i\leqslant m$，$\gamma_{ji}\in A_{\gamma f}\Leftrightarrow r=i$. 又 $\mu(M_j)=2^{-k}$，其中 $k=(m+1)^2$.

对上面描述的 M_j 和 $k=(m+1)^2$ 应用引理 3.3.6，就可断言当 n

$=2^{k-1}$时，有 $\mu(M_1\cup\cdots\cup M_n)>\frac{1}{4}$. 若记 $S=B_m\cap(M_1\cup\cdots\cup M_n)$，则

$$\mu(S)=\mu(B_m)+\mu(M_1\cup\cdots\cup M_n)-\mu(B_m\cup M_1\cup\cdots\cup M_n)$$
$$>\frac{7}{8}+\frac{1}{4}-1=\frac{1}{8}.$$

这时存在 $j,1\leqslant j\leqslant n$，使 $\mu(B_m\cap M_j)>\frac{1}{8n}=1/(4\cdot 2^{(m+1)^2})$.

考虑集

$$E=\bigcap_{i=0}^{m}D(k(m+1,q_{ji}),q_{ji}),$$

其中 $q_{ji}=p_{j(m+1)+i}$. 由式(*)，我们有

$$\mu(E)\geqslant 1-1/(4\cdot 2^{(m+1)^2}).$$

这样就存在 $g\in B_m\cap M_j\cap E$. 现在注意：

(1) $g\in B_m$ 表明 $\mathrm{ord}(V_{m(X)},\mathscr{U}_g)\leqslant m$.

(2) $g\in M_j$ 表明 $\gamma_{ji}\in A_{ig}(0\leqslant i\leqslant m)$，于是 $q_{ji}\in U_{ig}$.

(3) $g\in E=\bigcap_{i=0}^{m}D(k(m+1,q_{ji}),q_{ji})$ 表明 $\forall i,0\leqslant i\leqslant m$，有 $V_{k(m+1,q_{ji})}(q_{ji})\subset U_{ig}$，因此有

$$V_m(x)\cap U_{ig}\supset V_{j(m+1)+i}(x)\cap V_{k(j(m+1)+i,q_{ji})}(q_{ji})\neq\varnothing .$$

由此得出 $\mathrm{ord}(V_m(x),\mathscr{U}_g)\geqslant m+1$. 这与(1)的结论是矛盾的，因此一定有某个 m，使 $\mathscr{H}_m$ 在点 x 处局部有限 . □

3.3.8 定理(PMEA) 设 X 是第一可数的可数仿紧空间，$\{F_\alpha:\alpha<\lambda\}$ 是离散闭集族，$\{U_{n\alpha}:n<\omega,\alpha<\lambda\}$ 是开集族，使得对所有 $\alpha<\lambda$，

$$F_\alpha\subset\bigcap_n U_{n\alpha}\subset\bigcap_n\overline{U}_{n\alpha}=D_\alpha.$$

(1) 若 W 是包含 $\bigcup\{D_\alpha:\alpha<\lambda\}$ 的开集，则存在开集 U，使 $\bigcup\{F_\alpha:\alpha<\lambda\}\subset U\subseteq\overline{U}\subset W$.

(2) 若对所有的 $\alpha,\beta<\lambda,\alpha\neq\beta$，有 $D_\alpha\cap F_\beta=\varnothing$，则 $\{F_\alpha:\alpha<\lambda\}$ 可以由一族开集分离 .

证明 由定理 3.3.7，存在开集族序列 $\{\mathscr{H}_n:n\in\mathbf{N}\}$，$\mathscr{H}_n=\{H_{n\alpha}:\alpha<\lambda\}$，满足 $F_\alpha\subset H_{n\alpha}\subset U_{n\alpha}$，$H_{(n+1)\alpha}\subset H_{n\alpha}$，并且对任意 $x\in X$，存在 m，

使 $\mathscr{H}_m$ 在 x 处局部有限.

(1) 设 $V_n = X - \mathrm{Cl}(\bigcup\{H_{n\alpha}:\alpha<\lambda\})$,开集族 $\{W\}\cup\{V_n:n\in\mathbf{N}\}$ 是 X 的覆盖. 于是存在按指标的局部有限开加细 $\{W\}\cup\{G_n:n\in\mathbf{N}\}$. 令 $U = X - \mathrm{Cl}(\bigcup_n G_n)$,这时就有 $\bigcup\{F_\alpha:\alpha<\lambda\}\subset U\subset\overline{U}\subset W$.

(2) 令 $K_{n\alpha} = H_{n\alpha} - \mathrm{Cl}(\bigcup\{H_{n\beta}:\beta<\lambda,\beta\neq\alpha\})$,

$$K_\alpha = \bigcup_n K_{n\alpha},$$

则有 $F_\alpha\subset K_\alpha$,并且当 $\alpha\neq\beta$ 时,有 $K_\alpha\cap K_\beta=\varnothing$. 于是 $\{K_\alpha:\alpha<\lambda\}$ 就是分离 $\{F_\alpha:\alpha<\lambda\}$ 的开集族. □

为了证明下面的定理 3.3.9,我们先叙述两个已知的结果.

(A) 第一可数的可数仿紧 T_2 空间是正则的(Aull[1965],参考 Engelking[1977]5.2.D).

(B) 空间 X 是正规的当且仅当对任何不相交的闭集 E、F,存在开集序列 $\{H_n:n\in\mathbf{N}\}$,使得 $F\subset\bigcup_n H_n$,并且对每个 n,$\overline{H}_n\cap E=\varnothing$(参看 Engelking[1977]1.5.14).

3.3.9 定理(PMEA) 第一可数,可数仿紧的次仿紧 T_2 空间一定是仿紧的.

证明 设 X 是这样的一个空间,我们先证明 X 是正规的. 设 F,E 是不相交的闭集,由(A)知 X 是正则的. 于是存在一族开子集 $\{U_\alpha:\alpha<\lambda\}$,使 $F\subset\bigcup\{U_\alpha:\alpha<\lambda\}$,而 $\forall\alpha$,$\overline{U}_\alpha\cap E=\varnothing$. 由 X 的次仿紧性,存在 σ 离散闭集族 $\mathscr{F}=\{F_{n\alpha}:n\in\mathbf{N},\alpha<\lambda\}$(其中 $\mathscr{F}_n=\{F_{n\alpha}:\alpha<\lambda\}$ 是离散的),使 $\bigcup\mathscr{F}=F$,并且 $\forall\alpha$,$F_{n\alpha}\subset U_\alpha$. 由定理 3.3.8(1),存在开集列 $\{H_n:n\in\mathbf{N}\}$,使得 $\forall n$,$\bigcup\{F_{n\alpha}:\alpha<\lambda\}\subset H_n\subset\overline{H}_n\subset X-E$. 由(2)可以得出 X 是正规空间.

现在利用定理 3.3.4,得出 X 是族正规的,而族正规的次仿紧空间是仿紧的. □

3.3.10 定理(PMEA) 每个可数仿紧的 Moore 空间都是可度量的. □

Nyikos 和 Burke 的结果都是利用 PMEA 推出来的. 这个公理断言

通常的乘积测度(σ 可加 Borel 测度)"可以"扩张到$\mathscr{P}({}^{\lambda}2)$(${}^{\lambda}2$ 的每个子集都是可测的)上成为一个 c 可加的测度．然而,关键的问题在于,这种扩张的存在性是不是会和 ZFC 公理系统相容．

一个基数 κ 称为可测基数,如果 $\kappa > \omega$,并且 κ 上存在一个 κ 完备的自由超滤(即存在 κ 上的一个超滤 $\mathscr{U}$,使得$\bigcap \mathscr{U} = \varnothing$,但$\forall \mathscr{A} \subset \mathscr{U}$,若$|\mathscr{A}| < \kappa$,则$\bigcap \mathscr{A} \in \mathscr{U}$).

κ 称为强紧基数,如果 $\kappa > \omega$,κ 是正则基数,并且对任何集 S,S 上的任何一个κ 完备的滤子都可以扩张成一个 κ 完备的超滤．

每个强紧基数都是可测基数．因为 $\mathscr{F} = \{X \subset \kappa : |\kappa - X| < \kappa\}$是一个 κ 完备的自由滤子,由 $\mathscr{F}$ 扩张成的 κ 的任何一个超滤 $\mathscr{U}$ 也是一个 κ 完备的自由超滤．

若 κ 是可测基数,则 κ 必定是正则基数,并且是一个不可达(inaccessible)基数．

Kunen 证明了,假如在一个存在强紧基数 κ 的 ZFC 模型上通过 generic 扩张加上 κ 个随机实数,则在所得到的扩张模型中 PMEA 成立．换句话说,也就是证明了

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \exists \text{强紧基数}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{PMEA}).$$

这样,PMEA 和 NMC 的成立,很可能与大基数假设有关联,但人们通常都不愿意自己的研究结果与大基数假设有牵连,因为存在大基数与 ZFC 的相容性是不可能有形式化的证明的(参看 Kunen[1980]第 145 页).然而,期望 NMC 正面解答与 ZFC 的相容性能避开大基数假设最终是不能实现的．Fleissner[1982]运用一个集论假设 HYP 构造了一个正规、亚紧,不可度量的 Moore 空间．HYP 指的是如下的命题: $\exists$ 基数 κ,基数序列$\{\kappa_n : n \in \mathrm{N}\}$和集 E,满足下列条件:

(1) (a) $\forall n, \kappa_n < \kappa_{n+1}, \kappa = \bigcup_n \kappa_n$;

(b) $\forall n, 2^{\kappa_n} < \kappa$.

(2) $2^{\kappa} = \kappa^+$.

(3) (a) $E \subset \{\delta \in \kappa^+ : \mathrm{cf}(\delta) = \omega\}$,并且 E 是κ^+中的一个平稳集．

(b) $\forall \beta < \kappa^+$, $E \cap \beta$ 在 β 中不是平稳的．

如果 CH 成立，那么令 $\kappa = \omega$, $\kappa_n = n$, $E = \{\lambda \in \omega_1 : \lambda$ 是极限序数$\}$，上述 HYP 就能成立．这说明能由 CH 构造出正规，亚紧，不可度量的 Moore 空间．更为重要的一点是 Dodd 和 Jensen[1981]证明了如果 HYP 不成立，那么可以构造出一个内模型，在这个模型内存在可测基数，也就是说证明了

$$\text{Con}(\text{ZFC} + \neg\ \text{HYP}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \exists \text{可测基数}).$$

这个结果表明了 NMC 与 ZFC 的相容性不可避免地要涉及大基数与 ZFC 的相容性．因此 NMC 与 ZFC 的相容性也不可能有形式化的证明．

利用 PMEA，还得到了下述结果.

3.3.11 定理(PMEA) 第一可数的可数亚紧空间中的任一闭离散集都是 G_δ 集.(Burke[1984*b*]) □

3.3.12 定理(PMEA) 若 X 是次正规的，它的弱特征 $< c$，则 X 是族式次正规的.(Junnila[1983]) □

3.3.13 定理(PMEA)

(1) 弱特征 $< c$ 的可数 meso 紧(可数亚紧)空间是离散次 meso(次亚)可膨胀的．

(2) 弱特征 $< c$ 的局部紧，可数仿紧的空间是可膨胀的(expandable).

(3) 第一可数，可数亚紧的狭义拟仿紧空间是次亚紧的．(吴利生[1994]) □

这里的次正规性、族式次正规性与 Burke[1984a]4.19 前面介绍的 δ-正规性及族式 δ-正规性含义相同．狭义拟仿紧空间的概念是刘应明[1977]首先提出的．

另外，Balogh 与 Burke[1994]研究了↗正规空间，他们证明了下面的定理：

3.3.14 定理(PMEA) 第一可数的↗正规空间是族式↗正规的．

□

另一个比 PMEA 稍弱一点的命题是下述的 c 测度扩张公理．

c MEA(c Measure Extension Axiom) 对${}^c2$中任意 c 个子集，${}^c2$上通常的乘积测度都可以作出一个包含这 c 个子集在内的测度扩张．

Nyikos[1989]证明了下面的定理：

3.3.15 定理(c MEA) 正规，局部紧，局部连通的第一可数空间都是族正规的． □

作为推论立即可知 c MEA 蕴涵任何一个正规流形都是族正规的．

Fleissner[1985]利用乘积范畴扩张公理(Product Category Extension Axiom)也证明了定理 3.3.11 中所述的相同命题．

值得提出的是扩张公理 c MEA 和 PCEA 与 ZFC 的相容性也都涉及大基数假设与 ZFC 的相容性．

除上述的外，读者还可以参考吴利生[1995]和徐忠昌[1995]．

第四章　Suslin 线,◇与♣

§1　Suslin 线与 Suslin 树

在全序集的研究中很早就知道下面的结论:(1) 一个可数的全序集必定(序)同构于有理数集 **Q** 的一个子集 .(2) 一个有可数(序)稠密子集的全序集必定(序)同构于 **R** 的一个子集 .(3) 有可数(序)稠密子集,Dedekind 完备,没有间隙(gap)和没有端点的有序集必与 **R** 同构 .(2)、(3)分别等价于每个可分的 LOTS 都可嵌入 **R** 和每个可分,连通,并且没有最大元和最小元的 LOTS 与 **R** 同胚 . 那么,上述结论当用比可分性较弱的 CCC 取代时是否仍能成立呢? 1920 年 Suslin 首先提出了这个问题 . 后来人们就把连通,CCC,不可分,并且没有最大元和最小元的全序集称为 Suslin 线,而把"每个连通,CCC,没有最大元和最小元的 LOTS 必定同胚于 **R** 这个命题称为 Suslin 假设(Suslin's Hypothesis,记作 SH). 显然,$\exists$ Suslin 线$\Leftrightarrow\neg$ SH.

虽然 Suslin 线的概念很早就提了出来,但相当长一段时间,人们还不知道 Suslin 线究竟是存在还是不存在 .1943 年 Miller 证明了,存在 Suslin 线当且仅当存在 Suslin 树(一个没有不可数链和不可数反链的 ω_1 树).1935 年 Kurepa 利用 Suslin 线证明了存在一个 CCC 空间,它的平方不满足 CCC.20 世纪 70 年代初,Kunen 证明了 MA $\omega_1\Rightarrow$CCC 空间的乘积还是 CCC 空间,之后就证明了 MA $+\neg$ CH$\rightarrow$SH. 另一方面,Jensen 又证明了◇ $\rightarrow\exists$ Suslin 树 . 这样,就表明 Suslin 线(树)的存在性是与 ZFC 独立的了 .

下面我们先介绍 Suslin 线的一些基本性质 .

设 S 是一条 Suslin 线 .

(1) S 作为 LOTS 是单调正规的,从而它有很强的分离性质 .

(2) S 是局部紧的．实际上，对任意的 $a,b\in S,a<b$，闭区间$[a,b]$都是紧的．考虑$[a,b]$的一个由(相对)开区间构成的覆盖 $\mathscr{G}$.记 $\mathscr{U}=\{U:U$ 是 $\mathscr{G}$的有限并，并且 U 是开区间$\}$，又记 $U_a=\bigcup\{U\in\mathscr{U}:a\in U\}$．易证 U_a 是(相对于$[a,b]$的)一个开闭集．由于$[a,b]$是连通的，因此 $b\in U_a$，于是存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $b\in U$，即 $\mathscr{G}$有有限子覆盖．

(3) S 是第一可数的．由(2)，我们只需证明 S 的伪特征 $\psi(S)=\omega$ 即可．固定 $x\in S$，记 $A=\{s\in S:s<x\}$．假若对 A 的任意可数子集 C，$\mathrm{Sup}C<x$，这时，我们便可以作出一个 ω_1 序列$\{a_\alpha:\alpha<\omega_1\}$，使得 $\alpha<\beta\Rightarrow a_\alpha<a_\beta<x$．$\{(a_\alpha,a_{\alpha+1}):\alpha<\omega_1\}$就构成一个势为 ω_1 的不相交的开区间族，这与 S 是 CCC 矛盾．因此存在可数个$\{a_m:m<\omega\}\subset A$，使 $\mathrm{Sup}a_m=x$．令 $B=\{s\in S:x<s\}$，同理存在$\{b_n:n<\omega\}\subset B$，使 $\mathrm{Inf}\ b_n=x$．令 $I_{mn}=(a_m,b_n)$，显然有$\bigcap\{I_{mn}:m,n<\omega\}=\{x\}$．

(4) S 是σ-紧的．类似于(3)的论证，由 S 的 CCC 性质可以断定存在$\{a_m:m<\omega\}$和$\{b_n:n<\omega\}$，使得 $S=\bigcup\{(a_m,b_n):m,n<\omega\}=\bigcup\{[a_m,b_n]:m,n<\omega\}$，而每个闭区间$[a_m,b_n]$都是紧的．

对 S 的每个开区间(a,b)，都可以施行上述论证，得出(a,b)是σ-紧的．又由 S 满足 CCC 可推出 S 中的任何开集都可表示成可数个互不相交的开区间之并，因而也是 σ-紧的．注意 S 是不可分的，故有下面的定理．

4.1.1 定理 任何一条 Suslin 线 S 都是一个连通的，局部紧，局部连通，第一可数的 L 空间． □

定理 4.1.1 的陈述中，隐含着有可能存在不止一条 Suslin 线的意思．这是不难理解的，比如，在一条 Suslin 线 S 上补充一个最大(小)元 x_0，再在 x_0 的右(左)端接上一条直线 $\mathbf{R}$，这时 $S\cup\{x_0\}\cup\mathbf{R}$ 按照明显的序关系生成的 LOTS 仍是一条 Suslin 线．又比如，任取 $a,b\in S,a<b$．我们用 $\mathbf{R}$ 取代(a,b)所得的集$\{x\in S:x\leqslant a\}\cup\mathbf{R}\cup\{x\in S:x\geqslant b\}$，按照明显的序关系生成的 LOTS 也仍然是一条 Suslin 线．再比如，$(a,b)=\{x\in S:a<x<b\}$作为 S 的子空间也是一条 Suslin 线．尽管我们可以证明 $\mathbf{R}$ 的任何一个开区间都与 $\mathbf{R}$ 序同构(拓扑同胚)，然而我们却没有理由断言 Suslin 线 S 的开区间(a,b)一定与 S 同构．事实上，已经

证明在可构造全域 **L** 中,人们不但可以构造出一条 Suslin 线,甚至可以构造出一条 Suslin 线 S,使它的任何两个不同的开区间彼此都不能同构(参看 Rudin[1975]Ⅵ或 Jensen[1972]).

但不论怎样,我们总还是有一种"净化"的方法,从一条 Suslin 线中剔除掉"可分"的部分,产生出一条比较纯净,亦即无处可分的 Suslin 线.这就是下面的一个定理.

4.1.2 定理 如果存在一条 Suslin 线,那么就存在一条 Suslin 线,它没有任何可分的区间,也就是说,它不含有任何能同构于 **R** 的片段.

证明 设 S 是一条 Suslin 线.记 $\vartheta=\{I:I\subset S$ 是可分开区间$\}$.若 $\vartheta=\varnothing$,则 S 本身即为所求.若 $\vartheta\neq\varnothing$,对每个 $x\in\bigcup\vartheta$,注意 $\bigcup\{I\in\vartheta:x\in I\}$ 仍是一个开区间,记 I_x 为这个区间补充它的两个端点而成的闭区间.不难证明,对任意 $x,y\in\bigcup\vartheta$,要么 $I_x=I_y$,要么 $I_x\cap I_y=\varnothing$.因为 S 是 Suslin 线,所以 $\bigcup\vartheta\neq S$,而且这样的 I_x 顶多有可数个.记它为 $\{I_n:n<\omega\}=\mathscr{D}$,$\mathscr{D}$ 为 S 中的一个离散的开集族.把每一个这样的区间塌缩(collapse)成一个点,所生成的商空间 S' 仍是一个 LOTS,并且 S' 是局部紧,局部连通,连通的 CCC 空间,因此是一条 Suslin 线.然而 S' 的任何开区间将不再是可分的了. □

今后如无特别声明,我们提到的 Suslin 线总是指这种净化了的(无处可分)的 Suslin 线.

下面是 Kurepa 1950 年证明的一个著名结果.

4.1.3 定理 设 S 是 Suslin 线,则 $S\times S$ 不满足 CCC.(Kurepa[1950])

证明 对 $\alpha<\omega_1$,我们用归纳方式选出 $a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\in S$,使它们满足:(1) $a_\alpha<b_\alpha<c_\alpha$;(2) $(a_\alpha,c_\alpha)\cap\{b_\xi:\xi<\alpha\}=\varnothing$.假设对所有 $\xi<\alpha$,a_ξ,b_ξ,c_ξ 均已选出,因为 $\{b_\xi:\xi<\alpha\}$ 是可数集,所以开集 $G_\alpha=S-\mathrm{Cl}\{b_\xi:\xi<\alpha\}$ 不空.选 $a_\alpha<b_\alpha<c_\alpha$,使 $(a_\alpha,c_\alpha)\subset G_\alpha$,则 $a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha$ 即为所求.现在令 $U_\alpha=(a_\alpha,b_\alpha)\times(b_\alpha,c_\alpha)$,则 $\{U_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 $S\times S$ 中的开集族.设 $\alpha<\beta$,则 $U_\alpha\cap U_\beta=[(a_\alpha,b_\alpha)\cap(a_\beta,b_\beta)]\times[(b_\alpha,c_\alpha)\cap(b_\beta,c_\beta)]$.因为 $b_\alpha\notin(a_\beta,c_\beta)$,所以 $b_\alpha<a_\beta$ 或 $b_\alpha>c_\beta$.若 $b_\alpha<a_\beta$,则 $(a_\alpha,b_\alpha)\cap(a_\beta,b_\beta)=\varnothing$.若 $b_\alpha>c_\beta$,则 $(b_\alpha,c_\alpha)\cap(b_\beta,c_\beta)=\varnothing$.总之都有 $U_\alpha\cap U_\beta$

$=\varnothing$,即$\{U_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是 $S\times S$ 的互斥(开)族．所以 $S\times S$ 不满足 CCC.

□

将定理 4.1.3 与定理 2.1.13 Kunen 的结果对照,可见 Suslin 线的存在性与 MA ω_1 是不相容的．但已经证明存在 Suslin 线与 CH,存在 Suslin 线与$\neg$ CH两者都是相容的(参看 Todorcevic[1984]6.23 中的注(Ⅱ)).

再则,注意 S 是局部紧的,从而是 Baire 空间．由 Tall[1974a]的结果,Baire 的 CCC 空间有 Cal(ω_1,ω),而 $S\times S$ 显然没有 Cal(ω_1,ω),这也表明 S 没有 Cal ω_1.

4.1.4 定理 S 是 Baire 的,但不是 ω_2-Baire 的．

证明 我们指出 S 是 ω_1 个 cnwd 之并．任取可数子集 $A_0\subset S$, S 是无处可分的,则 $\text{Int}\,\overline{A_0}=\varnothing$．按归纳法,设 $\alpha<\omega_1$,并且对所有的 $\beta<\alpha$,我们已经选出 A_β,满足条件:$A_\beta\subset S-(\bigcup\{A_\xi:\xi<\beta\})^-$, $|A_\beta|=\omega$,并且 A_β 与 $S-(\bigcup\{A_\xi:\xi<\beta\})^-$ 的每个连通分支都有不空的交．$\bigcup\{A_\xi:\xi<\alpha\}$是可数的,所以 $S-(\bigcup\{A_\xi:\xi<\alpha\})^-$是不空的开集．作为 S 的子空间,它是局部紧,局部连通和 CCC 的,所以它只有$\leqslant\omega$ 个连通分支．这样就可以从中选出 A_α,使它满足前面所述的归纳条件．现在我们来证明$(\bigcup\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\})^-=S$. 假若 $x\notin(\bigcup\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\})^-$,则对每个 α, x 将属于$S-(\bigcup\{A_\beta:\beta<\alpha\})^-$的某个连通分支．设 $x_\alpha\in A_\alpha$ 是从这个连通分支中选出的点．这时,要么存在不可数的 $A\subset\omega_1$,使得$\forall\alpha\in A$,有 $x_\alpha<x$;要么存在不可数的 $A\subset\omega_1$,使得$\forall\alpha\in A$,有 $x_\alpha>x$. 在前一种情况下,当 $\alpha,\beta\in A$ 并且$\alpha<\beta$ 时,必定有 $x_\alpha<x_\beta<x$,即$\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$严格单调上升．由 S 的 CCC 性,这是不可能的,同理,第二种情况也不可能,这就证明了$(\bigcup\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\})^-=S$. 令 $B_\alpha=\bigcup\{A_\beta:\beta<\alpha\}$,则$|B_\alpha|=\omega$. 于是 $\text{Int}\,\overline{B_\alpha}=\varnothing$．若 $x\in S$,则由 S 的第一可数性及$\bigcup\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$的稠密性,存在 α 和 B_α 中的序列收敛于x,即 $x\in\overline{B_\alpha}$. 这就证明了 $S=\bigcup\{\overline{B_\alpha}:\alpha<\omega_1\}$是 ω_1 个 cnwd 之并． □

注:MA $\kappa\Rightarrow$任何局部紧 CCC 空间都是 κ^+-Baire 的．定理4.1.4再次说明存在 Suslin 线与 MA ω_1 是不相容的．

下面我们着手证明一个极为重要的命题,即 Suslin 线的存在等价于 Suslin 树的存在.

回忆一下,在第二章的定义 2.6.4 我们曾叙述过 Suslin 树的定义.树 T 是 Suslin 树,如果 T 是一个 ω_1 树,并且它的每个链和反链都是可数的.由定义可知 Suslin 树不可能是特殊的.

4.1.5 定义 一个 κ 树 T 称为修剪过的(Well-pruned),如果 $|\mathrm{Lev}_0(\mathrm{T})| = 1$,并且

$$\forall x \in T, \forall \alpha < \kappa, h(x, T) < \alpha \Rightarrow \exists y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)(x < y). \qquad \square$$

4.1.6 引理 设 κ 是正则基数,T 是一个 κ 树,则 T 有一个修剪过的 κ 子树.

证明 设 $T' = \{x \in T: |\{z \in T: z > x\}| = \kappa\}$.若 $x \in T'$, $y < x$, $y \in T$,则 $\{z \in T: z > x\} \subset \{z \in T: z > y\}$,于是 $y \in T'$.所以 T' 是 T 的子树.固定 $x \in T'$ 和 $\alpha < \kappa$,使 $h(x, T) < \alpha < \kappa$.令 $Y = \{y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T): x < y\}$.依定义及每个 $|\mathrm{Lev}_\beta(T)| < \kappa$ 的事实,集 $\{z \in T: z > x$,并且 $h(z, T) > \alpha\}$ 有势 κ,并且这个集的每个元一定要大于 Y 中的某个元.因为 $|Y| < \kappa$,所以存在 $y \in T$,使 $|\{z \in T: z > y\}| = \kappa$,于是 $y \in T'$.类似的论证表明 $\mathrm{Lev}_0(T') \neq \varnothing$,所以 $T' \neq \varnothing$.现在对任意 $x \in \mathrm{Lev}_0(T')$, $\{y \in T': y \geqslant x\}$ 就是一个修剪好了的 κ 子树. $\square$

4.1.7 引理 设 κ 是正则基数,T 是一个修剪过的 κ-Aronszajn 树,$x \in T$,则

$$\forall n < \omega, \exists \alpha > h(x, T)(|\{y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T): y > x\}| \geqslant n).$$

证明 因为 $|\{z \in T: z > x\}| = \kappa$,而 T 的每一条链有势 $< \kappa$,所以存在 $\alpha > h(x, T)$,使 $|\{y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T): y > x\}| > 1$.这样至少有 $y_1, y_2 \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$,使 $y_1 > x$, $y_2 > x$,所以定理所述的命题对 $n = 2$ 是成立的.现在假设命题对 n 成立,即存在 α 和 $y_1, \cdots, y_n \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$,使 $y_1 > x, \cdots, y_n > x$.对 y_n 重复上述论证,存在 $\beta > h(y_n, T)$ 和 $z_n, z_{n+1} \in \mathrm{Lev}_\beta(T)$, $z_n > y_n$, $z_{n+1} > y_n$.由于 T 是修剪过的,在 $\mathrm{Lev}_\beta(T)$ 中存在 $z_1, \cdots, z_{n-1}$,使 $z_1 > y_1, \cdots, z_{n-1} > y_{n-1}$.于是

$$\{y \in \mathrm{Lev}_\beta(T): y > x\} \supset \{z_1, \cdots, z_{n+1}\}.$$

所以命题对 $n+1$ 也成立． □

4.1.8 定理 $\exists$ Suslin 线 $\Leftrightarrow \exists$ Suslin 树．

证明 (1) 设 $(S,\lhd)$ 是 Suslin 线．记 $\vartheta=\{(a,b):a,b\in S,a\lhd b\}$．当 $I,J\in\vartheta$ 时，规定 $I\leqslant J$ 当且仅当 $J\subset I$．这时 $(\vartheta,\leqslant)$ 是个半序集．我们将作出 ϑ 的一个子集 T，使 $(T,\leqslant)$ 成为一个 Suslin 树．为此，对任意 $\beta<\omega_1$，我们按归纳方式选出 ϑ_β，使它满足：

① $\vartheta_\beta\subset\vartheta$ 是一个互斥族．

② $\bigcup\vartheta_\beta$ 是 S 的稠密集．

③ 若 $\alpha<\beta,I\in\vartheta_\alpha,J\in\vartheta_\beta$，则或者有 $I\cap J=\varnothing$，或者有 $J\subset I$，同时 $I-\mathrm{Cl}(J)\neq\varnothing$．

首先，选出 ϑ 的任意一个极大互斥族作为 ϑ_0．现在假定已经作出 ϑ_α，对每个 $I\in\vartheta_\alpha$，设 $\mathscr{K}_I$ 是 $\{K\in\vartheta:K\subset I$，且 $I-\mathrm{Cl}(K)\neq\varnothing\}$ 的一个极大互斥族，令 $\vartheta_{\alpha+1}=\bigcup\{\mathscr{K}_I:I\in\vartheta_\alpha\}$．当 λ 是极限序数时，假定对所有 $\alpha<\lambda$ 均已作出 ϑ_α．令

$\mathscr{K}=\{K\in\vartheta:\forall\alpha<\gamma,\forall I\in\vartheta_\alpha,[I\cap K=\varnothing]\vee[(K\subset I)\wedge(I-\mathrm{Cl}(K))\neq\varnothing]\}$．

取 $\mathscr{K}$ 的一个极大互斥族 ϑ_λ，这样就完成了 ϑ_α 的归纳构造过程．由各 ϑ_α 的构造，条件①和③显然是满足的．余下的是要验证 $\bigcup\vartheta_\alpha$ 是 S 中的稠密集．首先注意，由于 S 是满足 CCC 的，每个 ϑ_α 的势都是可数的．设 λ 是极限序数，又设 E 是 $\bigcup\{\vartheta_\alpha:\alpha<\lambda\}$ 的各区间的端点构成的集，则 $|E|=\omega$．对任一 $J\in\vartheta$，因为 S 是无处可分的，一定存在 $K_1\in\vartheta$，使 $K_1\subset J$，而 $K_1\cap E=\varnothing$，这时，对任一 $I\in\bigcup\{\vartheta_\alpha:\alpha<\lambda\}$，或者有 $K_1\cap I=\varnothing$，或者有 $K_1\subset I$．现在再取一个 $K\in\vartheta$，使 $K\subset K_1$，同时 $K_1-\mathrm{Cl}(K)\neq\varnothing$，则 $K\in\mathscr{K}$，并且 $K\subset K_1\subset J$．所以 $\bigcup\mathscr{K}$ 是 S 中的开稠密集．由于 ϑ_λ 是 $\mathscr{K}$ 的极大互斥族，$\bigcup\vartheta_\alpha$ 也是 S 中的稠密集，当 α 是后继序数时，用类似的方式也可以证明 $\bigcup\vartheta_\alpha$ 是 S 的稠密集．于是条件②也满足．

令 $T=\bigcup\{\vartheta_\alpha:\alpha<\omega_1\}$，易见 $(T,\leqslant)$ 是一个树，并且 $\mathrm{Lev}_\alpha(T)=\vartheta_\alpha$．假设 $A\subset T$ 是一个反链，则 A 由互不相交的开区间组成．故 $|A|\leqslant\omega$．现在设 $C=\{I_\xi:\xi<\omega_1\}$ 是 T 的一个链，满足 $\xi<\eta\Rightarrow I_\xi\leqslant I_\eta$，则由条件③，$\xi<\eta$ 时，有 $I_\eta\subset I_\xi$，而且 $I_\xi-\mathrm{Cl}(I_\eta)\neq\varnothing$．于是 $\{I_\xi-\mathrm{Cl}(I_{\xi+1}):\xi<$

$\omega_1\}$是势为 ω_1 的互斥开集族．这与 S 是 CCC 的条件矛盾，所以有 $|C|=\omega$．又因为对任何 $\alpha<\omega_1,\vartheta_\alpha\neq\varnothing$，即 T 是 ω_1 树，这就证明了$(T,\leqslant)$是一个 Suslin 树．

(2) 设$(T,\leqslant)$是一个 Suslin 树，不失普遍性，可假定它是修剪好了的．又设

$$L=\{C\subset T: C\text{ 是 }T\text{ 中的极大链}\}.$$

若 $C\in L$，则存在 $h(C)<\omega_1$，使得对每个 $\alpha<h(C)$，有唯一的元属于 $C\cap\mathrm{Lev}_\alpha(T)$，而 $\alpha\geqslant h(C)$时，$C\cap\mathrm{Lev}_\alpha(T)=\varnothing$．由于 T 是修剪过了的，一个极大链不能含有最大元，所以，$h(C)$必须是一个极限序数．记 $C(\alpha)=C\cap\mathrm{Lev}_\alpha(T)(\alpha<h(C))$.

任意给定 T 的一个全序$\prec$，我们定义 L 的一个全序$\lhd$如下：设 $C,D\in L,C\neq D$，记 $d(C,D)=\min\{\alpha: C(\alpha)\neq D(\alpha)\}$．显然，$d(C,D)<\min(h(C),h(D))$．定义 $C\lhd D$ 当且仅当$C(d(C,D))\prec D(d(C,D))$．容易验证$\lhd$确定了 L 的一个全序．

今证$(L,\lhd)$满足 CCC．假设$\{(C_\xi,D_\xi):\xi<\omega_1\}$是互斥开区间族，取 $E_\xi\in(C_\xi,D_\xi)$，又取 α_ξ 使得

$$\max(d(C_\xi,E_\xi),d(E_\xi,D_\xi))<\alpha_\xi<h(E_\xi).$$

(注意 $\max(d(C_\xi,E_\xi),d(E_\xi,D_\xi))<h(E_\xi)$，而 $h(E_\xi)$是极限序数，所以这种 α_ξ 是存在的．)考虑$\{E_\xi(\alpha_\xi):\xi<\omega_1\}$，假设 $E_\xi(\alpha_\xi)\leqslant E_\eta(\alpha_\eta)$，则 $E_\xi(\alpha_\xi)=E_\eta(\alpha_\xi)\in E_\eta$．于是 $d(E_\xi,E_\eta)\geqslant\alpha_\xi$．又由 $\alpha_\xi>d(C_\xi,E_\xi)=\beta_1$ 和 $d(D_\xi,E_\xi)=\beta_2$，$d(E_\xi,E_\eta)>\beta_1$，可得 $E_\eta(\beta_1)=E_\xi(\beta_1)\prec D_\xi(\beta_1)$，$E_\eta(\beta_2)=E_\xi(\beta_2)\succ C_\xi(\beta_2)$．于是有 $C_\xi\lhd E_\eta\lhd D_\xi$．这就得出矛盾，所以$\{E_\xi(\alpha_\xi):\xi<\omega_1\}$是不可比较的，即它是 T 的反链．因为 T 是 Suslin 树，所以$(L,\lhd)$满足 CCC.

为了证明$(L,\lhd)$是不可分的，只需证明对任何 $\delta<\omega_1$，$\{C:h(C)<\delta\}$不是 L 的稠密集．固定一个 $x\in\mathrm{Lev}_\delta(T)$，由引理4.1.7，存在 $\alpha>\delta$，使得 $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$中存在三个不同的元 y,z,w，它们都大于 x．设 D,E,F 是L 中分别包含y,z,w 的三个元，它们关于$\lhd$是有序的，不妨设 $D\lhd E\lhd F$．这时(D,F)是不空的开区间．然而由于 $x\in D\cap F$，(D,F)不可

能含有 $C\in L$,使 $h(C)<\delta$,这样,得出$(L,\lhd)$是不可分的全序集.

通过去掉$(L,\lhd)$中的孤立点和间隙(gap),并施行 Dedekind 序完备化,就可以作出一条 Suslin 线 S. □

Suslin 线存在的等价命题除了定理 4.1.8 所述的外,还有一些其他形式的描述.Stepran[1981]证明了以下命题:

$\exists$ Suslin 线$\Leftrightarrow\exists$不可数树$(T,\leqslant)$,它在 $\mathbf{R}$ 中不存在可数的连续像.

另一种描述是 Kemoto[1981]给出的:

$\exists$ Suslin 线$\Leftrightarrow\exists$没有孤立点的 CCC T_2 空间,它有一个 generic π 基,但没有稠密的 meager 集.

此外,Tall[1976],Efimov 与 Certanov[1976]也都给出了存在 Suslin 线的等价命题.

最后,我们指出 Williams 和周浩旋的一个结果(Williams, Zhou Haoxuan[1990]):

若存在一个单调正规的 CCC 不可分空间,则存在 Suslin 线.

§2 伪紧,局部紧,第一可数,CCC,非 * Lindelöf 空间的存在性

Suslin 线在拓扑学研究方面的第一个应用是由 Kurepa[1935]给出的.他的这篇文章给出了两个 CCC 空间的乘积空间不满足 CCC 的例子(见定理 4.1.3).同时,Suslin 线也是第一个正则,遗传 Lindelöf,不可分空间(L 空间)的例子(Souslin[1920]).1955 年,Rudin 利用 Suslin 树构造出了第一个 Dowker 空间.Rudin[1973]则进一步利用 Suslin 线构造出一个第一可数和遗传可分的 Dowker 空间(显然它是一个 S 空间).她在 Suslin 线方面还作了其他方面的一些研究(Rudin[1979a]、[1979c]),此外还可参看 Hart[1983],Bell[1985]等.

在第一章 §5,我们介绍了 * Lindelöf 空间的定义,并且用包含 * Lindelöf 空间的语句给出了 CH 的一个等价命题.1993 年,我们给出了一个产生非 * Lindelöf 空间的机器(Dai Mumin, Zhou Xaoxuan[1993]),

利用这个机器,可以产生出一个局部紧,CCC 的非 * Lindelöf 空间．利用 Suslin 线,还可以产生出一个第一可数,局部紧,CCC,非 * Lindelöf 的空间．那么,是否存在伪紧,第一可数,局部紧,CCC,非 * Lindelöf 空间呢? 若承认 MA + ¬ CH,则由于第一可数的局部紧 CCC 空间是可分的(见定理 4.2.2),所以这样的空间不可能存在．但是利用 Suslin 线或连续统假设,我们却可以作出这种空间,这说明是伪紧,局部紧,第一可数,CCC,非 * Lindelöf 空间的存在性是与 ZFC 独立的．

4.2.1 定理(MA ω_1) 设 X 是第一可数的,紧 T_2 CCC 空间,则 X 是可分的．

证明 对 X 中的每个点 x,取定 x 一个可数的局部基 $\mathscr{U}_x$. 对 X 中的每个不空开集 G,取定一个点 $y(G)\in G$. 对 X 中任一子集 A,定义

$$A' = A\cup\{y(X-\overline{A})\}\cup\{y(U\cap V): U, V\in\cup\{\mathscr{U}_z: z\in A\}\}.$$

现在归纳地作 D_α 如下: $D_0=\varnothing$, $D_{\alpha+1}=D'_\alpha$, 当 $\lambda<\omega_1$ 是极限序数时, $D_\lambda=\cup\{D_\xi:\xi<\lambda\}$. 最后令 $D=\cup\{D_\alpha:\alpha<\omega_1\}$.

由于每个 $\mathscr{U}_z$ 有 $|\mathscr{U}_z|\leqslant\omega$, 运用归纳法可以证明, 对每个 $\alpha<\omega_1$, 有 $|D_\alpha|\leqslant\omega$, $|D|\leqslant\omega_1$.

现在我们来考察 X 的子空间 $\overline{D}$.

(1) $\overline{D}$ 是 CCC 的．为此只需证明子空间 D 是 CCC 的．设 $\{G\cap D: G\in\mathscr{G}\}$ 是 D 的一族非空(相对)开集, $|\mathscr{G}|>\omega$, 对每个 $G\in\mathscr{G}$, 取定一个点 $x(G)\in G\cap D$. 这时, 存在 $U(G)\in\mathscr{U}_{x(G)}$, 使 $U(G)\subset G$. $|\{U(G): G\in\mathscr{G}\}|>\omega$. 由 X 的 CCC 性质, 存在 $G_1, G_2\in\mathscr{G}$, 使 $U(G_1)\cap U(G_2)\neq\varnothing$．又由 $x(G_1), x(G_2)\in D$, 可知存在 α, 使 $x(G_1)\in D_\alpha$, $x(G_2)\in D_\alpha$. 根据定义, 此时 $y(U(G_1)\cap U(G_2))\in D_{\alpha+1}\subset D$. 于是 $y(U(G_1)\cap U(G_2))\in(G_1\cap D)\cap(G_2\cap D)$. 这说明 $\{G\cap D: G\in\mathscr{G}\}$ 不是互斥族．

(2) $\pi(\overline{D})=\omega_1<2^\omega$. 令

$$P=\{U\cap\overline{D}: \exists y\in D, U\in\mathscr{U}_y\},$$

则 P 是 $\overline{D}$ 的势为 ω_1 的相对开集族．今证明 P 是 $\overline{D}$ 的一个 π 基．设 G 是 X 的任一开集, 使 $G\cap\overline{D}\neq\varnothing$, 这时 $G\cap D\neq\varnothing$．于是存在 α 和 $y\in$

D_α,使 $y\in G\cap D$. $\mathscr{U}_y$ 为 y 的局部基,存在 $U\in\mathscr{U}_y$,使 $U\subset G$. 这样,$U\cap\overline{D}\in P$. 而 $U\cap\overline{D}\subset G\cap\overline{D}$,所以 P 是 $\overline{D}$ 的 π 基 .

(3) $\overline{D}$ 是可分的 . X 是紧 T_2 空间,所以 $\overline{D}$ 也是紧 T_2 空间 .(1),(2)指出了 $\overline{D}$ 是 π 权 $<2^\omega$ 的 CCC 空间 . 根据定理 2.1.15,$\overline{D}$ 是可分空间 .

(4) 最后我们证明 $\overline{D}=X$. 由于 $\{D_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是单调上升的,而 X 是第一可数的,故有 $\overline{D}=(\bigcup_\alpha D_\alpha)^-=\bigcup_\alpha\overline{D_\alpha}$. 取 $\overline{D}$ 的一个可数稠密集 C,这时存在 α,使 $C\subset\overline{D_\alpha}$,于是 $\overline{D}=\overline{C}=\overline{D_\alpha}$. 假若 $X\neq\overline{D}$,则 $X-\overline{D}\neq\varnothing$. 由定义知 $y(X-\overline{D})=y(X-\overline{D_\alpha})\in D_{\alpha+1}\subset\overline{D_{\alpha+1}}=\overline{D}$. 这与 $y(X-\overline{D})\in X-\overline{D}$ 矛盾,所以有 $\overline{D}=X$. □

注:上述证明中可以看出,X 是第一可数的条件可以减弱为:$\forall x\in X$,x 的 π 特征数 $<\omega_1$,并且 X 的紧度 $t(X)<\omega_1$. 即 $\mathscr{U}_x$ 可代以 x 点处的局部 π 基,由 $t(X)<\omega_1$,可以推出 $\overline{D}=\bigcup_\alpha\overline{D_\alpha}$.

4.2.2 定理(MA ω_1) 第一可数,局部紧的 CCC 空间是可分的 .

证明 设 X 是第一可数,局部紧的 CCC 空间 . 记 $\mathscr{U}=\{U:U$ 是非空开集,$\overline{U}$ 是紧的$\}$. 取 $\mathscr{U}$ 的一个极大互斥族,由于 X 满足 CCC,它是可数的,记为 $\{U_n:n<\omega\}$. 由定理 4.2.1,每个 $\overline{U_n}$ 是可分的,有可数稠密子集 D_n,令 $D=\bigcup_n D_n$. 显然 D 就是 X 的一个可数稠密子集 . □

4.2.3 定理(CH 或 ∃ Suslin 线) 存在一个伪紧,局部紧,第一可数,0 维的 CCC 空间,它不是 * Lindelöf 的 .

证明 在承认 CH 情况下,Kunen[1981]构造出了一个紧的 0 维 L 空间(参看 Negrepontis[1984]5.9). 若存在 Suslin 线,则存在一条紧的,遗传 Lindelöf,无处可分的 Suslin 线 S. $S\times\{0,1\}$ 按照字典式的序关系构成的序拓扑空间就是一个紧的 0 维 L 空间 . 假设 X 就是这样一个紧的 0 维 L 空间,取定 X 的一个由紧开集组成的基 $\mathscr{B}$,对每个 $x\in X$,固定一个单调下降的可数局部基 $\{B_n(x):n\in\mathbf{N}\}$.

设 $\mathscr{A}=\{A_\alpha:\alpha<\kappa\}\subset[\mathbf{N}]^\omega$(此处 $\kappa>\omega$)是一个极大几乎互斥族,满足条件 $A_n>n$,即 $A_n\cap\{1,2,\cdots,n\}=\varnothing\,(n<\omega)$. 这总是可以做到的,否则的话,我们可以用 $A_n-\{1,2,\cdots,n\}$ 取代原来的 A_n.

设 $\Phi=\{f:f$ 是函数,$\mathrm{dom}\,f\in[\mathbf{N}]^\omega$, $\mathrm{ran}\,f\subset\mathscr{B}$,使得 $\forall x\in X$, $\exists n_x$,

$\forall i \geq n_x, i \in \mathrm{dom}\, f$,有 $f(i) \cap B_i(x) = \varnothing\}$.

设 $f, g \in \Phi$,我们称 f, g 是正交的,记作 $f \perp g$,如果存在 n,使得当 $i \in \mathrm{dom}\, f, j \in \mathrm{dom}\, g$,并且 $i, j \geq n$ 时,恒有 $f(i) \cap g(j) = \varnothing$.设 $\mathscr{F} \subset \Phi$ 是一个极大正交族.令

$$\hat{X} = (X \times \mathbf{N}) \cup \mathscr{F} \cup \{\hat{x}_\alpha : x \in X, \alpha < \kappa\},$$

其中 $\{\hat{x}_\alpha : x \in X, \alpha < \kappa\}$ 是一个与 $(X \times \mathbf{N}) \cup \mathscr{F}$ 不相交的集.

定义 $\hat{X}$ 的一个邻域系统如下:

$$U_n(p) = B_n(x) \times \{i\} \ (n \in \mathbf{N}), \text{若 } p = \langle x, i \rangle,$$

$$U_n(p) = \{\hat{x}_\alpha\} \cup (\bigcup \{B_i(x) \times \{i\} : i \in A_\alpha, i \geq n\})(n \in \mathbf{N}), \text{若 } p = \hat{x}_\alpha,$$

$$U_n(p) = \{f\} \cup (\bigcup \{f(i) \times \{i\} : i \in \mathrm{dom}\, f, i \geq n\})(n \in \mathbf{N}), \text{若 } p = f \in \mathscr{F}.$$

容易验证,由上述邻域系统生成的拓扑空间 $\hat{X}$ 是一个局部紧,0 维,第一可数,CCC 但不是可分的空间.$X \times \mathbf{N}$ 是 $\hat{X}$ 中的开稠密集,并且每个开子空间 $X \times \{i\}$ 都同胚于 X.

现在我们来证明:

(1) $\hat{X}$ 是伪紧的.

设 $\mathscr{G}$ 是 $\hat{X}$ 中的非空开集组成的无限族,考虑两种情况:

① 存在 $i \in \mathbf{N}$,使 $|\{G : G \cap (X \times \{i\}) \neq \varnothing\}| \geq \omega$.由于 $X \times \{i\}$ 是紧的,因此 $\mathscr{G}$ 在 $X \times \{i\}$ 中必有聚点 p.

② 否则的话,就存在无限集 $S \subset \mathbf{N}$,使得对每个 $i \in S$,$\mathscr{G}$ 中都有一个元,记作 G_i,使 $G_i \cap (X \times \{i\}) \neq \varnothing$.于是存在 $B_i \in \mathscr{B}$,使 $B_i \times \{i\} \subset G_i$.定义函数 $h : S \to \mathscr{B}$,使得 $h(i) = B_i$.

若 $h \in \Phi$,则由 Φ 的定义,存在 x 和无限集 $A \subset S = \mathrm{dom}\, h$,使得对所有 $i \in A$,$h(i) \cap B_i(x) \neq \varnothing$.由于 $\mathscr{A}$ 是一个 madf,存在 α,使 $|A_\alpha \cap A| = \omega$.这表明有无限个 $i \in A_\alpha \cap \mathrm{dom}\, h$,使 $h(i) \cap B_i(x) \neq \varnothing$.因此 $\forall n, m, U_n(\hat{x}_\alpha) \cap (\bigcup \{h(i) \times \{i\} : i \geq m\}) \neq \varnothing$.这就证明了 $\hat{x}_\alpha$ 是 $\mathscr{G}$ 的一个聚点.

若 $h\in\Phi$，这时存在 $f\in\mathscr{F}$，使 h 和 f 不是正交的，即 $\mathrm{dom}\ f\cap\mathrm{dom}\ h$ 中有无限个 i，使 $h(i)\cap f(i)\neq\varnothing$．这表明 $\forall n,m,U_n(f)\cap(\bigcup\{h(i)\times\{i\}:i\geqslant m\})\neq\varnothing$．于是 f 就是 $\mathscr{G}$ 的一个聚点．

(2) X 不是 * Lindelöf 的．

给出 $\hat{X}$ 的一个开覆盖 $\mathscr{U}$.

$\mathscr{U}=\{X\times\mathbf{N}\}\cup\{U_1(\hat{x}_\alpha):x\in X,\alpha<\kappa\}\cup\{U_1(f):f\in\mathscr{F}\}$.

对 $X\times\mathbf{N}$ 的任一可数子集 M，令

$$P(M)=\{x\in X:\exists n,\text{使}\langle x,n\rangle\in M\}.$$

$P(M)$ 是 X 的一个可数子集．由于 X 是不可分的，存在有不可数个 $x\in X-\mathrm{Cl}_XP(M)$，对每个这样的 x 都对应有 $n(x)\in\mathbf{N}$，使 $B_{n(x)}(x)\cap\mathrm{Cl}_XP(M)=\varnothing$．注意 $A_{n(x)}>n(x)$，我们便有 $U_1(\hat{x}_{n(x)})\cap[\mathrm{Cl}_XP(M)\times\mathbf{N}]=\varnothing$，这表明 $\hat{x}_{n(x)}\notin\bigcup\{\mathrm{St}(p,\mathscr{U}):p\in M\}$．但这样的 x 有不可数个，而每一个 $\mathrm{St}(f,\mathscr{U})$ 又都不含有形如 $\hat{x}_\alpha$ 的点．所以 $\hat{X}$ 不是 * Lindelöf 的． □

Watson[1982]证明了，若承认 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$，则局部紧正规空间都是 CWH．这样，每个局部紧正规 CCC 空间都是 $\aleph_1$ 紧的．注意 $\aleph_1$ 紧空间都是 * Lindelöf 空间，而 $\mathbf{V}=\mathbf{L}\Rightarrow\diamondsuit+\mathrm{GCH}$，这表明若承认 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$，则定理 4.2.3中所作的例子不可能是正规的．另一方面，Watson[1986]又证明了$\mathrm{Con(ZF)}\to\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}+2^\omega=\omega_2+\exists$局部紧，全正规，CCC，亚 Lindelöf，但不是仿紧的空间)．因此，"存在局部紧，正规，CCC 的非 * Lindelöf 空间"是与 ZFC 独立的一个命题．迄今为止，我们却还不知道下列命题能否和 ZFC 相容：

(1) $\exists$ 伪紧的，局部紧，正规，CCC，非 * Lindelöf 空间．

(2) $\exists$ 伪紧，第一可数，局部紧，正规，CCC，非 * Lindelöf 空间．

注：承认 $\mathrm{MA}+\neg\mathrm{CH}$，上述问题的答案都是否定的．

§3 闭无界集与平稳集，◇原理与♣

这一节主要是介绍一个有用的集论假设，即◇原理．◇的定义用

到了 ω_1 中的平稳集的概念，尽管我们在定义2.6.11和定理 2.6.12 作过简单的介绍，但是鉴于闭无界集和平稳集是集论中十分重要又经常碰到的概念，所以一开始我们还是就一般的序数和基数形式予以定义，并作些初步探讨．

4.3.1 定义 设 λ 是任一极限序数，$\kappa>\omega$ 是任一正则基数．

(1) $U\subset\lambda$ 称为在 λ 中是无界的，如果对任一 $\beta<\lambda$，$U-\beta\neq\varnothing$，否则称为在 λ 是有界的．

(2) $C\subset\lambda$ 称为闭的，如果对任意极限序数 $\mu\in\lambda$，若 $C\cap\mu$ 在 μ 中无界，则 $\mu\in C$. 这也等价于说 C 作为 LOTS λ 的子集是闭集．

(3) $S\subset\kappa$ 称为平稳的，如果对任意闭无界集 $C\subset\kappa$，$C\cap S\neq\varnothing$．闭无界集(Closed Unbounded Set)一般简记为 Cub 或 Club. □

容易看出，每个平稳集 S 都是无界的．下面还会看出每个 Cub 是平稳的．

4.3.2 定理 在 κ 中，$<\kappa$ 个 Cub 之交还是 Cub.

证明 设 $\{C_\xi:\xi<\alpha\}$(其中 $\alpha<\kappa$)是一族 Cub. $C=\bigcap\{C_\xi:\xi<\alpha\}$ 显然是闭集．对任一 $\xi<\alpha$，定义一个函数 $f_\xi:\kappa\to\kappa$，使得 $f_\xi(\gamma)=\min(C_\xi-(\gamma+1))$. 于是 $f_\xi(\gamma)\in C_\xi$，$f_\xi(\gamma)>\gamma$. 令 $g(\gamma)=\mathrm{Sup}\{f_\xi(\gamma):\xi<\alpha\}$. 由于 κ 是正则基数，$g(\gamma)\in\kappa$. 现在令 $g^1=g,\cdots,g^{n+1}=g(g^n),\cdots,g^\omega=\mathrm{Sup}\{g^n:n\in\mathbf{N}\}$. 注意下列命题是成立的：

$\forall\xi,\forall\gamma,\forall\beta<g^\omega(\gamma),\exists n$，使 $g^n(\gamma)>\beta$.

因为 $f_\xi(g^n(\gamma))\in C_\xi$，而 $f_\xi(g^n(\gamma))\leqslant g^{n+1}(\gamma)<g^\omega(\gamma)$，所以 $C_\xi\cap g^\omega(\gamma)$ 是 $g^\omega(\gamma)$ 中的无界集．于是 $g^\omega(\gamma)\in C_\xi$，即 $g^\omega(\gamma)\in\bigcap\{C_\xi:\xi<\alpha\}=C$. 由于 γ 是任意的，所以 C 是无界的． □

推论 κ 中每个 Cub C 都是平稳的．若 S 是平稳集，则对任一 Cub C，$S\cap C$ 仍是平稳的． □

4.3.3 定理 (1) $<\kappa$ 个非平稳集之并是非平稳集．(2) 设 S 是平稳集，$f:S\to\alpha(\alpha<\kappa)$ 是一个函数，则存在 $\eta<\alpha$，使 $f^{-1}(\eta)$ 是平稳的．

证明 (1) 设 $\{A_\xi:\xi<\alpha\}(\alpha<\kappa)$ 是非平稳集族．对每个 ξ，存在 κ 中的 Cub C_ξ，使 $C_\xi\cap A_\xi=\varnothing$．$C=\bigcap\{C_\xi:\xi<\alpha\}$ 仍是一个 Cub，而 $C\cap(\bigcup\{A_\xi:\xi<\alpha\})=\varnothing$，故 $\bigcup\{A_\xi:\xi<\alpha\}$ 不是平稳集．

(2) 注意 $S = \bigcup\{f^{-1}(\xi):\xi<\alpha\}$. 因为 S 是平稳集，由(1)可知，至少存在一个 $\eta<\alpha$，使 $f^{-1}(\eta)$ 是平稳集． □

4.3.4 定理 设 $S\subset\kappa$ 是平稳集，则 S 可以分解成 κ 个互不相交的平稳集之并．

证明 我们仅就 κ 是后继基数的情况证明．当 κ 是极限基数(此时 κ 是弱不可达的)时，结论仍然成立(其证明可参看 Solovay[1971])．

设 $\kappa=\lambda^+$，这时 $|\kappa-\lambda|=\kappa$. 对每个 $\alpha\in\kappa-\lambda$，有 $|\alpha|=\lambda$，所以存在由 λ 到 α 的一个双射 f_α. 设 $\beta\in\lambda$，记 $A_\alpha^\beta=S\cap\{\xi:f_\xi(\beta)=\alpha\}$. 注意 $\alpha_1\neq\alpha_2$ 时，有 $A_{\alpha_1}^\beta\cap A_{\alpha_2}^\beta=\varnothing$，因为由 $f_\xi(\beta)=\alpha$，可推出 $\xi>\alpha$，所以 $A_\alpha^\beta\subset\{\xi:\xi>\alpha\}$. 另一方面，对任意 $\xi>\alpha$，有 $\mathrm{ran}\, f_\xi=\xi\supset\alpha$，所以存在 β，使 $f_\xi(\beta)=\alpha$. 于是 $\bigcup\{A_\alpha^\beta:\beta\in\lambda\}=\{\xi:\xi>\alpha\}\cap S$. $\{\xi:\xi>\alpha\}$ 是一个 Cub，所以集 $\bigcup\{A_\alpha^\beta:\beta\in\lambda\}$ 是平稳的，于是存在 $\beta_\alpha\in\lambda$，使 $A_\alpha^{\beta_\alpha}$ 是平稳的，$\{A_\alpha^{\beta_\alpha}:\alpha\in\kappa-\lambda\}$ 是由 S 的子集构成的，势为 κ 的集族．因为 $\beta_\alpha\in\lambda$，而 $\lambda<\kappa=\lambda^+$，所以存在固定的 β 和 $H\subset\kappa-\lambda$，满足 $|H|=\kappa$，而 $\forall\alpha\in H$，$\beta_\alpha=\beta$，这时，$\{A_\alpha^\beta:\alpha\in H\}$ 就是一个势为 κ 的互斥族，其中每个 A_α^β 都是 S 中的平稳集．将它们重新排列为 $\{A_\alpha:\alpha<\kappa\}$，现在令 $S_0=S-\bigcup\{A_\alpha:\alpha>0\}$，当 $\alpha>0$ 时，令 $S_\alpha=A_\alpha$，则 $A_0\subset S_0$. 于是 $\{S_\alpha:\alpha<\kappa\}$ 就是 S 的一个分解，每个 S_α 都是平稳集． □

下面是一个很有用的定理．这个定理当 $S=\omega_1$ 时的特款我们在以前曾经用到过．

4.3.5 定理(Pressing down 引理，Fodor 定理) 设 f 是一个由 κ 上的平稳集 S 到 κ 的函数，满足条件：$\forall\xi\in S, f(\xi)<\xi$，存在 $\alpha\in\kappa$，使得 $f^{-1}(\alpha)$ 是 κ 中的平稳集．

证明 用反证法．假设对所有的 α，$f^{-1}(\alpha)$ 都不是平稳的．这时，存在 Cub C_α，使 $C_\alpha\cap f^{-1}(\alpha)=\varnothing$．记 $C=\{\alpha:\forall\xi<\alpha,\alpha\in C_\xi\}$，则 $\alpha\in S$ 时，由 $f(\alpha)=\xi<\alpha$ 及 $\alpha\in f^{-1}(\xi)$，可知 $\alpha\notin C_\xi$. 于是依定义，$\alpha\notin C$，这表明 $C\cap S=\varnothing$．下面我们来证明 C 是一个 Cub，这将与 S 是平稳集的假设相矛盾．

(1) C 是闭的．设 $C\cap\lambda$ 在 λ 上无界．于是对任一固定的 $\xi<\lambda$ 和

任意 $\eta,\xi<\eta<\lambda$,存在 $\beta\in C$,使 $\eta<\beta<\lambda$. 由 C 的定义,有 $\beta\in C_\xi$. 因为 η 是任意的,这就表明 $C_\xi\cap\lambda$ 在 λ 上是无界的. 但 C_ξ 是 Cub,所以有 $\lambda\in C_\xi$. 依 C 的定义就得出 $\lambda\in C$.

(2) C 是无界的. 对任意给定的 $\alpha<\kappa$,令 $\alpha_0=\alpha$. 归纳地选取 α_n,使 $\alpha_n>\alpha_{n-1}$,$\alpha_n\in\bigcap\{C_\xi:\xi\leqslant\alpha_{n-1}\}$. 由定理4.3.2知,这样的 α_n 总是可以找到的. 令 $\lambda=\mathrm{Sup}\{\alpha_n:n<\omega\}$. 因为 α_n 严格递增,所以 λ 是个极限序数,$\lambda>\alpha_0=\alpha$. 今证明 $\lambda\in C$. 对任意固定的 $\xi<\lambda$ 和任意的 $\eta,\xi<\eta<\lambda$,存在 n,使 $\eta<\alpha_n<\lambda$. 由定义 $\alpha_{n+1}\in\bigcap\{C_\xi:\xi<\alpha_{n+1}\}$,有 $\alpha_{n+1}\in C_\xi$. 于是 $C_\xi\cap\lambda$ 在 λ 上无界,因而 $\lambda\in C_\xi$. 由 ξ 的任意性及 C 的定义,$\lambda\in C$,因此 C 是无界的. □

现在,我们来介绍◇原理. 它是由 Jensen 首先提出的.

4.3.6 定义 $\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}\subset\mathscr{P}(\omega_1)$,称为一个◇序列,如果它满足下列条件:

(1) $\forall\alpha,A_\alpha\subset\alpha$.

(2) $\forall A\subset\omega_1,\{\alpha:A\cap\alpha=A_\alpha\}$是 ω_1 中的一个平稳集.

◇原理是指如下的命题:存在一个◇序列. □

ω_1 中◇序列的存在性并不是显而易见的,它可以由 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ 推出,因而◇与 ZFC 是相容的. 当然也可以直接用 forcing 方法来证明 Con(ZFC+◇)(参看 Kunen[1980]Ⅶ5.2 和Ⅷ8.3).

从定义可以看出,◇序列的每个元素都是 ω_1 中的有界集,即属于 $\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{P}(\alpha):\alpha<\omega_1\}$,而且 $\mathscr{B}$ 中的每一个元都在序列中被重排了 ω_1 次. 再者,对任意 $A\subset\omega$,总存在 α,使 $A\cap\alpha=A_\alpha$,且 $\alpha>\omega$. 由此推得 $A\subset\omega\subset\alpha$,于是有 $A=A_\alpha$. 这说明 $|\mathscr{P}(\omega)|=\omega_1$. 这样我们得到下面定理.

4.3.7 定理 ◇ $\Rightarrow$CH. □

在 CH 不成立的集论模型中,◇也不可能成立. 由此可见◇与 ZFC 公理系统是独立的.

◇序列的存在性除了能导出连续统假设之外,还有更丰富的内涵. 比如由它可以推出 Suslin 树的存在性,推出♣序列的存在性. 这样,当运用◇来研究拓扑学中的问题时,往往能得到比单用 CH 时所能得到

的结果更好．

为了便于应用，我们先给出$\diamondsuit$原理的一些等价刻画．

4.3.8 定理 下列各命题是等价的：

(1) $\exists\diamondsuit$序列．

(2) $\exists$序列$\{f_\alpha\in{}^\alpha\alpha:\alpha<\omega_1\}$，使得$\forall f\in{}^{\omega_1}\omega_1$，$\{\alpha:f\restriction_\alpha=f_\alpha\}$是平稳的．

(3) $\exists$序列$\{M_\alpha\subset\alpha\times\alpha:\alpha<\omega_1\}$，使得$\forall M\subset\omega_1\times\omega_1$，$\{\alpha:M\cap(\alpha\times\alpha)=M_\alpha\}$是平稳的．

(4) $\exists$序列$\{\mathscr{A}_\alpha\subset\mathscr{P}(\alpha):|\mathscr{A}_\alpha|\leqslant\omega,\alpha<\omega_1\}$，使得$\forall A\subset\omega_1$，$\{\alpha:A\cap\alpha\in\mathscr{A}_\alpha\}$是平稳的．

证明 (1)$\Rightarrow$(3)．设$\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是一个$\diamondsuit$序列，又设$f$是$\omega_1\to\omega_1\times\omega_1$上的一个双射，使得对任一极限序数$\lambda\in\omega_1$，有$\operatorname{ran}f\restriction_\lambda=\lambda\times\lambda$．(用归纳法，这样的$f$是不难作出的．$\lambda=\omega$时，显然存在双射$f:\omega\to\omega\times\omega$．假设对每个小于$\lambda$的极限系数$\alpha$，已经定义了双射$f_\alpha:\alpha\to\alpha\times\alpha$，使得$\forall$极限序数$\beta<\alpha$，有$f_\beta\subset f_\alpha$．(1) 若存在极限序数序列$\{\alpha_n\}$，使$\alpha_n\uparrow\lambda$，此时令$f_\lambda=\bigcup_n f_{\alpha_n}$即可．(2) 存在极限序数$\alpha$，使$\lambda=\alpha+\omega$．因为$|(\lambda\times\lambda)-(\alpha\times\alpha)|=|\omega|=\omega$，$f_\alpha$可以扩张成$\lambda$到$\lambda\times\lambda$上的双射$f_\lambda$．)令$M_\alpha=f(A_\alpha)$，我们证明$\{M_\alpha:\alpha<\omega_1\}$满足(3)的要求．设$M\subset\omega_1\times\omega_1$．令$A=f^{-1}(M)$，则当$\alpha$是极限序数时，$A\cap\alpha=f^{-1}(M)\cap f^{-1}(\alpha\times\alpha)=f^{-1}(M\cap(\alpha\times\alpha))$．所以$A\cap\alpha=A_\alpha\Rightarrow M\cap(\alpha\times\alpha)=M_\alpha$．由于$S=\{\alpha:A\cap\alpha=A_\alpha\}$是平稳集，而$\omega_1$全体极限序数之集$\mathrm{Lim}(\omega_1)$是Cub，于是$\{\alpha:M\cap(\alpha\times\alpha)=M_\alpha\}\supset S\cap\mathrm{Lim}(\omega_1)$是平稳集．

(3)$\Rightarrow$(2)．设$\{M_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是满足(3)的序列．记$A=\{\alpha:M_\alpha$是一个函数，$\operatorname{dom}M_\alpha=\alpha\}$．当$\alpha\in A$时，记$f_\alpha=M_\alpha$，当$\alpha\notin A$时，随意选取一个由$\alpha$到$\alpha$的函数$f_\alpha$．今证明所得的函数列$\{f_\alpha:\alpha<\omega_1\}$满足(2)的条件．设$f\in{}^{\omega_1}\omega_1$，则$f\subset\omega_1\times\omega_1$．注意$f\cap(\alpha\times\alpha)=M_\alpha$意味着$f\restriction_\alpha=M_\alpha$，从而$\{\alpha\in A:f\restriction_\alpha=f_\alpha\}=\{\alpha:f\cap(\alpha\times\alpha)=M_\alpha\}$．由(3)知$\{\alpha:f\cap(\alpha\times\alpha)=M_\alpha\}$是平稳集，所以$\{\alpha:f\restriction_\alpha=f_\alpha\}$也是平稳集．

(2)$\Rightarrow$(1)．令$A_\alpha=\operatorname{ran}f_\alpha$．则$\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$就是一个$\diamondsuit$序列．

(1)⇒(4). 设 $\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是◇序列，只需令 $\mathscr{A}_\alpha=\{A_\alpha\}$. 则 $\{\mathscr{A}_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 即为所求.

(4)⇒(1). 设 $\{\mathscr{A}_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 满足(4)的条件，取一个由 ω_1 到 $\omega\times\omega_1$ 上的双射 f. 设

$$C=\{\alpha:\alpha\geqslant\omega, f^{-1}(\omega\times\alpha)\subset\alpha, \text{并且 } f(\alpha)\subset\omega\times\alpha\}.$$

今证明 C 是一个 Cub. C 是闭集这一点是很容易看出的，今证 C 的无界性. 对任意的 $\alpha<\omega_1$，记 $\alpha_0=\alpha$. α 是可数的，故存在 $\alpha_1>\alpha_0$，使 $f(\alpha_0)\subset\omega\times\alpha_1$. 再取 $\alpha_2>\alpha_1$，使 $f^{-1}(\omega\times\alpha_1)\subset\alpha_2$. 归纳地作出一个序列 $\{\alpha_n\}$，使它满足

$$\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\alpha_{n+1}<\cdots$$

$$f(\alpha_n)\subset\omega\times\alpha_{n+1}, \text{当 } n \text{ 是偶数}.$$

$$f^{-1}(\omega\times\alpha_n)\subset\alpha_{n+1}, \text{当 } n \text{ 是奇数}.$$

令 $\lambda=\operatorname{Sup}_n\alpha_n$，则 λ 是一个极限序数，$\lambda>\alpha$，并且 $\forall\xi\in\lambda$，$\exists$ 偶数 n，使 $\xi<\alpha_n$，即 $\xi\in\alpha_n$. 于是

$$f(\xi)\in f(\alpha_n)\subset\omega\times\alpha_{n+1}\subset\omega\times\lambda,$$

$$f^{-1}(\omega\times\xi)\subset f^{-1}(\omega\times\alpha_n)\subset\alpha_{n+1}\subset\lambda.$$

这表明 $f^{-1}(\omega\times\lambda)\subset\lambda$，$f(\lambda)\subset\omega\times\lambda$，即 $\lambda\in C$. 所以 C 是一个 Cub.

现在作一个序列 $\{\mathscr{B}_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 如下：若 $\alpha\in C$，则令 $\mathscr{B}_\alpha=\{f(A):A\in\mathscr{A}_\alpha\}$；若 $\alpha\notin C$，则令 $\mathscr{B}_\alpha=\varnothing$.

设 $B\subset\omega\times\omega_1$，记

$$S=\{\alpha<\omega_1:f^{-1}(B)\cap\alpha\in\mathscr{A}_\alpha\}.$$

由假设，S 是平稳的，C 是 Cub，所以 $S\cap C$ 也是平稳的. 若 $\alpha\in S\cap C$，则有 $B\cap(\omega\times\alpha)=f(f^{-1}(B)\cap\alpha)\in f(\mathscr{A}_\alpha)=\mathscr{B}_\alpha$. 这样，集

$$\{\alpha<\omega_1:B\cap(\omega\times\alpha)\in\mathscr{B}_\alpha\}$$

就是平稳的.

每个 $\mathscr{B}_\alpha$ 的势是可数的. 设 $\mathscr{B}_\alpha=\{B_\alpha^k:k<\omega\}$，其中 $B_\alpha^k\subset\omega\times\alpha$，设 $B_{\alpha n}^k=\{\xi:<n,\xi>\in B_\alpha^k\}$. 我们来证明存在 n，使 $\{B_{\alpha n}^n:\alpha<\omega_1\}$ 是一个◇序列. 如若不然，这时对每个 n，都可以找到一个 $B_n\subset\omega_1$，使 $\{\alpha:B_n\cap\alpha=B_{\alpha n}^n\}$ 不是平稳集. 令 $B=\bigcup\{\{n\}\times B_n:n<\omega\}$. 则对每个 n，

$$\{\alpha: B\cap(\omega\times\alpha)=B_\alpha^n\}$$

都不是平稳集,因为可数个非平稳集之并还是非平稳集,所以

$$\{\alpha: B\cap(\omega\times\alpha)\in B_\alpha\}$$

是非平稳集．这样就导致了矛盾,说明一定存在◇序列． □

下面是 Ginsburg[1977b]给出的与◇等价的一些拓扑学命题:拓扑空间 X 中的一个 ω_1 序列 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 称为万有的(universal),如果对任何 $x\in X$,存在平稳集 S,使 $\{x_\alpha:\alpha\in S\}$ 收敛于 x.容易看出,若 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 X 中的万有序列,f 是 X 到 Y 上的连续映射,则 $\{y_\alpha=f(x_\alpha):\alpha<\omega_1\}$ 是 Y 中的一个万有序列．

4.3.9 定理 ◇等价于下列空间中的任何一个包含有万有 ω_1 序列:

(1) ω^*.

(2) 2^{ω_1}.

(3) 所有满足 $w(X)=\omega_1$ 的空间 X.

(4) 所有满足 $w(X)=2^\omega$ 的空间 X.

证明 ◇$\Rightarrow$(4).设 $\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是◇序列,X 是满足 $w(X)=2^\omega=\omega_1$ 的拓扑空间(注意◇ $\to 2^\omega=\omega_1$),$\mathscr{B}=\{U_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 X 的一个基．对任意 $\alpha<\omega_1$,若 $\bigcap\{U_\xi:\xi\in A_\alpha\}\neq\varnothing$,则任取一点 $x_\alpha\in\bigcap\{U_\xi:\xi\in A_\alpha\}$;若 $\bigcap\{U_\xi:\xi\in A_\alpha\}=\varnothing$,则任取一点 $x_\alpha\in X$. 今证 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是一个万有序列．

设 $x\in X$, $A=\{\alpha:x\in U_\alpha\}$.由◇, $S=\{\alpha:A\cap\alpha=A_\alpha\}$ 是平稳的．对 x 的任一邻域 $U_{\alpha_0}\in\mathscr{B}$,当 $\alpha>\alpha_0$ 并且 $\alpha\in S$ 时,由 $A\cap\alpha=A_\alpha$,得 $A_\alpha=\{\xi<\alpha:x\in U_\xi\}$.于是 $\alpha_0\in A_\alpha$,从而 $x\in\bigcap\{U_\xi:\xi\in A_\alpha\}$.特别地,有 $x_\alpha\in U_{\alpha_0}$,于是 $\{x_\alpha:\alpha\in S\}$ 收敛于 x.

因为 $w(\omega^*)=c$, $w(2^{\omega_1})=\omega_1$ 及 $\omega_1\leqslant 2^\omega$,所以(4)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(2),(4)$\Rightarrow$(1).

(1)$\Rightarrow$(2).我们只需证明任何一个权为 ω_1 的紧 T_2 空间都是 ω^* 的某个连续像．设 X 是紧 T_2 空间, $w(X)=\omega_1$. 由于对任何开集 G, Int(Cl G)是正则开集,因此 X 有一个势为 ω_1 的,由正则开集构成的基.

设由这个基生成的 Boole 代数为 $\mathscr{B}$,则 $|\mathscr{B}| = \omega_1$. 用与定理 1.9.11 的证明类似的方法,可以证明 $\mathscr{B}$ 同构于 $\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 的一个子代数(即 $\mathscr{B}$ 可以嵌入 $\mathscr{P}(\omega)/Fin$). 不失普遍性,可假定 $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(\omega)/Fin$. 这样,对任一 $p \in \omega^* = S(\mathscr{P}(\omega)/Fin)$($\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 的 Stone 空间),定义 $\varphi(p) = \{B \in \mathscr{B}: B \in p\}$,则 $\varphi(p)$ 是 $\mathscr{B}$ 上的 uft. 对每个 $B \in \mathscr{B}$, $\varphi(p) \in B^*_{\mathscr{B}} \Leftrightarrow B \in \varphi(p) \Leftrightarrow B \in p \cap \mathscr{B} \Leftrightarrow B \in p \Leftrightarrow p \in B^*_{\mathscr{P}(\omega)/Fin}$,所以 φ 是连续映射. 另外,若 q 是 $\mathscr{B}$ 上的一个 uft,设 p 是包含 $\{A \in \mathscr{P}(\omega)/Fin: \exists B \in q$,使 $B \subset A\}$ 的一个 $\mathscr{P}(\omega)/Fin$ 上的 uft,则有 $\varphi(p) = q$. 因此 $S(\mathscr{B})$ 是 ω^* 的连续像. 另一方面,对任意 $q \in S(\mathscr{B})$,由于 X 是紧空间,$\bigcap\{\overline{B}: B \in q\} \neq \varnothing$,又 $\mathscr{B}$ 是 X 的基,可以推出 $\bigcap\{\overline{B}: B \in q\}$ 是 X 中唯一一个点,记它为 $f(q)$. 设 $B_0 \in \mathscr{B}$,则 $q \in f^{-1}(B_0) \Leftrightarrow f(q) \in B_0 \Leftrightarrow \forall B \in q, B \cap B_0 \neq \varnothing$. 由于 q 是 uft,可知 $B_0 \in q$. 于是 $q \in B_0^*$,所以 f 是连续的. 最后,若 $x \in X$,令 $q = \{B \in \mathscr{B}: x \in B\}$,则 q 是一个 uft,且 $f(q) = x$. 于是 f 是 $S(\mathscr{B})$ 到 X 上的连续映射. 这就证明了 X 是 ω^* 的连续像.

(2)$\Rightarrow$($\diamondsuit$). 设 $\{f_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ 是 2^{ω_1} 中的一个万有序列. 对任意 $f \in 2^{\omega_1}$,依定义存在平稳集 S,使 $\{f_\alpha: \alpha \in S\}$ 收敛于 f. 设 $T = \{\alpha \in S: f\restriction_\alpha \neq f_\alpha\restriction_\alpha\}$. 假若 T 是平稳的,$\alpha \in T$,记 $x_\alpha = \min\{\xi: f_\alpha(\xi) \neq f(\xi)\}$,则 $x_\alpha < \alpha$. 由 Pressing down 引理,存在平稳集 $T_1 \subset T$ 和 $\beta \in \omega_1$,使得 $\forall \alpha \in T_1$,有 $x_\alpha = \beta$. 这样 $\forall \alpha \in T_1$,有 $f_\alpha(\beta) \neq f(\beta)$. 但是 $[\langle\beta, f(\beta)\rangle]$ 是 f 的一个邻域,$T_1 \subset S$,而 $\alpha \in T_1 \Rightarrow f_\alpha \notin [\langle\beta, f(\beta)\rangle]$. T_1 是不可数的,这就与 $\{f_\alpha: \alpha \in S\}$ 收敛于 f 矛盾,它说明 T 不是平稳的. 于是 $S - T$ 就是平稳的,因此 $\{\alpha: f_\alpha\restriction_\alpha = f\restriction_\alpha\}$ 是平稳的. 现在令 $A_\alpha = f_\alpha^{-1}(1) \cap \alpha$ $(\alpha < \omega_1)$. 对任意 $A \subset \omega_1$,设 f 是 A 的特征函数,则 $\{\alpha: A \cap \alpha = A_\alpha\} = \{\alpha: f\restriction_\alpha = f_\alpha\restriction_\alpha\}$ 是平稳的. 这就证明了 $\{A_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ 是一个 $\diamondsuit$ 序列. □

§4 Suslin 树的存在性

这一节,我们将根据 $\diamondsuit$ 原理证明 Suslin 树的存在性. 它是首先由 Jensen 给予证明的.

4.4.1 定义 一个树$(T,\leqslant)$称为永远分枝的(ever-branching),如果对任何$x\in T$,$\{y\in T:x<y\}$都不是全序的． □

从定义看出,树T的每一个节点x后面至少有两个点y_1,y_2是不可比较的．因此从x后面某一点起,树T就要开杈,而且由"永远分枝"性,x后面不但要开杈,而且有无限个分枝．

4.4.2 引理 设$(T,\leqslant)$是一个永远分枝的ω_1树,并且T的每个反链都是可数的,则T是Suslin树．

证明 只需证明$(T,\leqslant)$是一个Aronszajn树,即每个链是可数的即可,我们用反证法．假设T有一个不可数的链B.不失普遍性,假定B是极大链．这时对每个$\alpha<\omega_1$,有$B\cap \mathrm{Lev}_\alpha(T)\neq\varnothing$．由永远分枝的性质,对每个$x\in T$,存在$f(x)\overline{\in} B$,使$f(x)>x$.归纳地选择$x_\alpha\in B$,使得$h(x_\alpha)>\mathrm{Sup}\{h(f(x_\beta)):\beta<\alpha\}$.这时,当$\beta<\alpha$时,有$h(f(x_\beta))<h(f(x_\alpha))$,所以不可能有$f(x_\alpha)<f(x_\beta)$.但是,假若$f(x_\beta)<f(x_\alpha)$,则$f(x_\beta)\in(\cdot,f(x_\alpha))$.这是个正序集,故$f(x_\beta)$与$x_\alpha$是可比较的．但$h(x_\alpha)>h(f(x_\beta))$,于是有$f(x_\beta)<x_\alpha$.由$B$的极大性,得出$f(x_\beta)\in(\cdot,x_\alpha)\subset B$.这就与$f(x_\beta)$的选法相矛盾．因此$\{f(x_\alpha):\alpha<\omega_1\}$是一个不可数反链．这与假设矛盾,于是$(T,\leqslant)$是Suslin树． □

4.4.3 定理 $\diamondsuit\Rightarrow\exists$ Suslin树．

证明 设$\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是一个$\diamondsuit$序列,我们要作出的Suslin树$T$的装备集是$\omega_1$.其构造的方法是通过归纳的方式在$\omega_1$上定义一个半序$\lhd$,使$(T,\lhd)$满足Suslin树的条件．为此我们先引进一个记号．对于$\alpha<\omega_1$,记

$$I_\alpha=\{\omega\cdot\alpha+n:n\in\omega\}.$$

我们对$\lhd$所规定的归纳条件是:

(1) $\lhd$是一个树型半序,并且$\forall\beta<\omega_1,\mathrm{Lev}_\beta(T)=I_\beta$.

(2) $\forall\beta<\omega_1,n<\omega,(\omega\cdot\beta+n)\lhd(\omega(\beta+1)+2n),(\omega\cdot\beta+n)\lhd(\omega\cdot(\beta+1)+2n+1)$.

(3) 若$\beta<\alpha,x\in I_\beta$,则$\exists y\in I_\alpha$,使$x\lhd y$.

(4) $\forall$极限序数α,若$T_\alpha=\{t:h(t)<\alpha\}=\alpha$,并且若$A_\alpha$是$\alpha$中的

一个极大反链，则$\forall x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$，$\exists y \in A_\alpha$，使$y \lhd x$.

首先，令$\mathrm{Lev}_0(T)=\omega$. 假设$\lhd$已经在$\omega \cdot \alpha$上定义，并且对$\beta<\alpha$满足归纳条件(1)～(4). 我们将$\lhd$扩张到$\omega \cdot \alpha \cup I_\alpha$上去.

(A) 若α是后继序数，$\alpha=\beta+1$. 这时通过条件(2)作扩张，容易验证归纳条件(1)～(4)仍然是满足的.

(B) 若α是极限序数，对任意$x \in T_\alpha=\omega \cdot \alpha$，设$B(x)$是$T_\alpha$中一个包含$x$的链，使得$\forall \eta<\alpha$，$B(x) \cap I_\eta \neq \varnothing$. 为了找出这样的链$B(x)$，首先对所有$m<\omega$，取$\xi_m=\xi_m(x)$，使$h(x)<\xi_0<\cdots$，并且$\mathrm{Sup}\{\xi_m: m<\omega\}=\alpha$. 然后归纳地选$y_m=y_m(x) \in I_{\xi_m}$，使得$x \lhd y_0 \lhd \cdots$. 由归纳条件(3)，这是可能的. 令$B(x)=\{z \in T_\alpha: \exists n$，使$z \lhd y_n(x)\}$，则它即为所求.

现在，把$\omega \cdot \alpha$的元排成$\omega \cdot \alpha=\{x_n: n<\omega\}$，并且$\forall z \in \omega \cdot \alpha$，定义$z \lhd(\omega \cdot \alpha+n)$当且仅当$z \in B(x_n)$. 因为$B(x_n)$与$T_\alpha$的每一层都相交，所以$\omega \cdot \alpha+n$在$(T, \lhd)$中确实有高度$\alpha$. 因此归纳条件(1)～(3)是满足的.

对于条件(4)，设$T_\alpha=\omega \cdot \alpha=\alpha$，$A_\alpha$是$(T_\alpha, \lhd)$中一个极大反链. 这时，我们对$B(x)$的选取方法稍作修改. 首先，注意$A_\alpha$是极大反链，可以找到$z \in A_\alpha$，使$x$与$z$可比较. 于是可以选$y_0(x)$，使$x \lhd y_0(x)$，同时$z \lhd y_0(x)$. 令$\xi_0(x)=h(y_0(x))$，然后再像前面一样选取$\xi_m(x)(1 \leqslant m<\omega)$和$y_n(x)(1 \leqslant m<\omega)$. 这时，每个$B(x)$就与$A_\alpha$相交，条件(4)也被满足.

在完成上述的归纳过程后，我们便得到了一个树$(T, \lhd)$. 根据构造，每个$\mathrm{Lev}_\alpha(T)=I_\alpha$是可数集，所以$(T, \lhd)$是一个$\omega_1$树. 又根据条件(2)，$\forall x \in T$，$\{y \in T: x \lhd y\} \cap \mathrm{Lev}_{h(x)+1}(T)$包含有两个元，因而$\{y \in T: x \lhd y\}$不是全序的，所以$(T, \lhd)$是一个永远分枝的$\omega_1$树. 根据引理4.4.2，要指出$(T, \lhd)$是Suslin树，只需证明它的任何一个极大反链$A$都是可数的. 为此我们先叙述一个引理.

引理　设$T=(\omega_1, \lhd)$是一个ω_1树，$T_\alpha=\bigcup\{\mathrm{Lev}_\beta(T): \beta<\alpha\}$，则

(1) $\{\alpha<\omega_1: T_\alpha=\alpha\}$是$\omega_1$中的Cub.

(2) 若$A \subset \omega_1$是T的一个极大反链，则集$D=\{\alpha<\omega_1: T_\alpha=\alpha$，并

且 $A\cap T_\alpha$ 是 T_α 中的极大反链}是 ω_1 中的一个 Cub.

根据这个引理,D 是 Cub,而全体极限序数的集也是 Cub,于是 $C = D\cap\{\alpha:\alpha$ 是极限序数}是 Cub. $\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是$\diamondsuit$序列,所以 $\{\alpha<\omega_1:A\cap\alpha=A_\alpha\}$ 是平稳的,于是存在 $\alpha\in C$,使 $A\cap\alpha=A_\alpha$. 假若有 $z\in A-A_\alpha$,则有 $h(z)\geqslant\alpha$. 于是存在 $x\in\mathrm{Lev}_\alpha(T)$,使 $x\lhd z$,又存在 $y\in A_\alpha$,使 $y\lhd x$. 这时 $y\lhd z$ 与 A 是反链的前提矛盾,因此得出结论 $A=A_\alpha$,即 A 是可数的. 定理得证. □

下面给出引理的证明:

(1) 由 $T_\alpha=\bigcup\{T_\beta:\beta<\alpha\}$ 可知,若 $\alpha_n\uparrow\alpha$,而每个 α_n 有 $T_{\alpha_n}=\alpha_n$,则显然有 $T_\alpha=\bigcup\{\alpha_n:n<\omega\}=\alpha$. 所以集 $\{\alpha<\omega_1:T_\alpha=\alpha\}$ 是闭的.

现在,$\forall\xi\in\omega_1$,定义 $f(\xi)=h(\xi,T)$, $g(\xi)=\mathrm{Sup}\{\eta:\eta\in\mathrm{Lev}_\xi(T)\}$. 记

$$C=\{\alpha:\forall\xi\in\alpha,f(\xi)\in\alpha,g(\xi)\in\alpha\}.$$

① 若 $\alpha\in C$,则 $\forall\xi\in\alpha,h(\xi,T)<\alpha$,所以 $\xi\in T_\alpha$. 另一方面,若 $\beta\in T_\alpha$,记 $h(\beta,T)=\xi$,则 $\beta\in\mathrm{Lev}_\xi(T)$,所以 $\beta\leqslant g(\xi)<\alpha$,即 $\beta\in\alpha$. 于是有 $T_\alpha=\alpha$,即 $C\subset\{\alpha:T_\alpha=\alpha\}$.

② 若 $\{\alpha_n:n<\omega\}\subset C,\alpha_n\uparrow\alpha$,则 $\forall\xi\in\alpha,\exists n$,使 $\xi\in\alpha_n$. 于是 $f(\xi)\in\alpha_n,g(\xi)\in\alpha_n$,从而有 $f(\xi)\in\alpha,g(\xi)\in\alpha$. 由定义有 $\alpha\in C$. 所以 C 是闭集.

③ C 是无界的. 对任意 $\xi<\omega_1$,设 $\mathscr{B}=\mathrm{Cl}\{f,g,\xi\}$,即 $\mathscr{B}$ 是满足下述封闭条件的最小的集. $\xi\subset\mathscr{B}$,并且 $\forall\beta\in\mathscr{B},f(\beta)\in\mathscr{B},g(\beta)\in\mathscr{B}$. 由于 ξ 是可数的,由定理 2.1.4 后面的 LST 定理知 $\mathscr{B}$ 是可数的. 于是存在 $\varphi^0(\xi)<\omega_1$,使 $\mathscr{B}\subset\varphi^0(\xi)$, φ^0 是 $\omega_1\to\omega_1$ 的一个函数. 记 $\varphi^{n+1}(\xi)=\varphi^0(\varphi^n(\xi))$,又记 $\varphi(\xi)=\mathrm{Sup}\{\varphi^n(\xi):n<\omega\}$,则 $\varphi(\xi)>\xi$. 现在 $\forall\eta\in\varphi(\xi),\exists n<\omega$,使 $\eta\in\varphi^n(\xi)$. 于是 $f(\eta),g(\eta)\in\varphi^{n+1}(\xi)\subset\varphi(\xi)$. 依定义有 $\varphi(\xi)\in C$. 这说明 C 是无界的.

综合①、②、③及开始所述,就证明了 $\{\alpha:T_\alpha=T\}$ 是一个 Cub.

(2) 记

$$D=\{\alpha:T_\alpha=\alpha,\text{并且 }A\cap T_\alpha\text{ 是 }T_\alpha\text{ 中的极大反链}\}.$$

易验证 D 是一个闭集．由假设，A 是 T 的一个极大反链．对 T 中任意一个 ξ，存在 $h(\xi)\in A$，使 $h(\xi)\leqslant\xi$，或者 $h(\xi)\geqslant\xi$．类似于(1)中所作的论证，可以找出一个函数 φ，使得 $\forall\xi\in\omega_1,\varphi(\xi)>\xi$，并且 $\forall\eta\in\varphi(\xi)$，有 $f(\eta)\in\varphi(\xi),g(\eta)\in\varphi(\xi),h(\eta)\in\varphi(\xi)$．于是 $T_{\varphi(\xi)}=\varphi(\xi)$，并且 $A\cap T_{\varphi(\xi)}$ 是 $T_{\varphi(\xi)}$ 的极大反链，即 $\varphi(\xi)\in D$．于是 D 是一个 Cub． □

以上论证主要参考 Kunen[1980]第二章．当然，存在 Suslin 树与 ZFC 的相容性并不只上面一种证明方法．从◇与 ZFC 的相容性可推出 Con(ZFC + ∃ Suslin 线 + CH)．已经证明 Con(ZFC + ∃ Suslin 线 + ¬ CH)(Jech[1967]，Tennebaum[1978])．另外，Jensen 还通过研究 **L** 的结构构造出了具有许多奇异性质的 Suslin 线 S．比如，S 与它的逆序 S^{-1} 既可以是同构的，也可以是不同构的．S 中既可以有 $c=2^{\omega}$ 个自同构，也可以有 2^{c} 个自同构等等．

§5 Ostaszewski 线

1974 年，Ostaszewski 运用◇作出了一个性质极为奇特的空间，它的装备集是 ω_1(或直线)，而这个空间的拓扑是 0 维，全正规，第一可数，可数紧，遗传可分，非 Lindelöf 的．在他的论文[1976]里，还第一次提出了一个比◇稍弱的命题——所谓梅花假设，即♣．它在文中的论证部分起着关键的作用．随后，一些学者单独运用♣也构造出了一些有趣的拓扑空间的例子(如 de Caux[1976]等)．

4.5.1 定义 ♣是指如下的命题：

♣：存在一个递增的，由 ω_1 中的极限序数构成的 ω_1 序列 $\{\lambda_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 和相应的一个 ω_1 序列 $\{S_\alpha:\alpha<\omega_1\}$(称为梅花序列)，使得

(1) $\forall\alpha,S_\alpha\subset\lambda_\alpha$，并且 S_α 与 λ_α 共尾．

(2) $\forall X\in[\omega_1]^{\omega_1},\exists\alpha$，使 $S_\alpha\subset X$． □

4.5.2 定理 ◇ ⇒♣．

证明 设 $\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是一个◇系列，又设 $\mathrm{Lim}(\omega_1)=\{\lambda_\alpha:\alpha<$

$\omega_1\}$,对任一 λ_α,若 A_{λ_α} 与 λ_α 共尾,就令 $S_\alpha = A_\alpha$,否则的话,就令 $S_\alpha = \lambda_\alpha$.下面我们来验证 $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是一个梅花序列.

条件(1)显然是满足的.现在假设 $X \subset \omega_1$ 是一个不可数集.记 X' 是 X 的导集.由 $|X| = \omega_1$ 知道 X' 是一个 Cub. 于是由◇假设,$\{\alpha : X \cap \alpha = A_\alpha\}$ 是一个平稳集,它与 X' 相交,即存在 $\alpha \in X'$,使 $X \cap \alpha = A_\alpha$.$\alpha \in X'$,所以 α 是极限序数,并且 $A_\alpha = X \cap \alpha$ 与 α 共尾.假设 $\alpha = \lambda_\beta$,则由我们的作法有 $A_\alpha = S_\beta$. 于是 $S_\beta = X \cap \lambda_\beta$,从而 $S_\beta \subset X$. □

综合定理 4.3.7 和定理 4.5.2,可以看出◇ ⇒CH + ♣. 实际上,Devlin已经指出由 CH 和♣也可以推出◇. 如果把 ω_1 中全体可数子集排成一个 ω_1 序列 $\{M_\alpha : \alpha < \omega_1\}$,使得 $\forall \alpha, M_\alpha \subset \alpha$,并且 $\forall M \in [\omega_1]^\omega$,$\{\alpha : M_\alpha = M\}$ 是不可数的.又设 $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是一个梅花序列,定义 $A_\alpha = \bigcup\{M_\xi : \xi \in S_\alpha\}$,那么就可以证明 $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是一个◇序列.♣与 MA + ¬ CH是不相容的(对比定理 4.5.4 与定理 2.10.4),然而,♣与 ¬ CH却已证明是相容的(Shelah[1980]).

4.5.3 引理 设(X, τ)是一个局部紧,0 维,可度量空间,A, B 是 X 中的两个不相交的无限闭离散集,Z 是一个与 X 不相交的可数集,则在 $X \cup Z$ 上存在一个拓扑 τ^*,使得

(1) τ^* 是局部紧,0 维,第一可数的.

(2) $\tau^*|_X = \tau$.

(3) $\forall z \in Z$,z 同时是 A 和 B 的极限点.

证明 任取 $A \cup B$ 中一个由彼此不同的点组成的序列 $\{x_n : n < \omega\}$,使得 $x_{2k+1} \in A$,$x_{2k} \in B$,$\{x_n : n < \omega\}$ 是(X, τ)中的一个闭离散集.由于(X, τ)是局部紧,0 维可度量空间,每个 x_n 可以找到一个紧邻域 U_n,使 $\{U_n : n < \omega\}$ 是(X, τ)中的离散族.将 ω 作一个划分 $\{P_k : k < \omega\}$,使得每个 P_k 同时包含无限个奇数和无限个偶数.记 $Z = \{z_k : k < \omega\}$,对每个点 z_k,令

$$V_n(z_k) = \{z_k\} \cup [\bigcup\{U_j : j \in P_k, j > n\}].$$

取 $\{V_n(z_k) : n < \omega\}$ 作为 z_k 的邻域基,记 τ^* 为由 $\{V_n(z_k) : n < \omega, k < \omega\} \cup \tau$ 生成的 $X \cup Z$ 的拓扑,则容易验证 τ^* 满足所要求的条件(1) ~ (3).

□

4.5.4 定理($\diamondsuit$) 存在 ω_1 上的一个拓扑 τ，它具有如下的性质：(ω_1,τ)是0维，局部紧，局部可数，全正规，遗传可分，非 Lindelöf 的可数紧空间(称它为 Ostaszewski 线).

证明 整个证明过程分成两个部分，第一部分是用归纳方式来构造 τ，第二部分是证明(ω_1,τ)具有定理所述的各种性质．

(1) (ω_1,τ)的构造．

设$\{\lambda_\alpha:\alpha<\omega_1\}$，$\{S_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是♣序列，不失普遍性，可设 $\lambda_0=S_0=\omega$.

由 CH，可将$[\omega_1]^\omega$ 排列成$\{B_\alpha:\alpha<\omega_1\}$.

$\alpha=0$ 时，$\lambda_0=\omega$，取 λ_0 上的拓扑 τ_0 为离散拓扑．

假设对所有 $\beta<\alpha$，我们在 λ_β 上都作出了一个局部紧，0维，第一可数的拓扑 τ_β(由于$|\tau_\beta|=\omega$，$(\lambda_\beta,\tau_\beta)$必是可度量的)，并且假定 $\gamma<\beta$ 时有$\tau_\beta|_{\lambda_\gamma}=\tau_\gamma$. 记

$$\alpha^*=\mathrm{Sup}\{\lambda_\beta:\beta<\alpha\},\tau^*=\bigcup\{\tau_\beta:\beta<\alpha\}.$$

① 若 $\lambda_\alpha=\alpha^*$，则直接令 $\tau_\alpha=\tau^*$．

② 若 α 是极限序数，而 $\lambda_\alpha>\alpha^*$，这时任取一个与 α^* 共尾的序列，把它记作 A，又设 $B=B_\gamma$ 是α^*中使 $B_\gamma-A$ 相对于(α^*,τ^*)成为无限闭离散集的第一个 B_γ. 记 $A=\{a_n:n<\omega\}$. 由于它与 α^* 共尾，因此$\forall\beta<\alpha$，$A\cap\lambda_\beta$ 是有限集，A 在$(\lambda_\beta,\tau_\beta)$中没有聚点，所以，$A$ 是(α^*,τ^*)中的闭离散集．令 $Z=\lambda_\alpha-\alpha^*$，应用引理4.5.3，就可以作出 $\lambda_\alpha=\alpha^*\cup Z$ 上一个局部紧，0维，第一可数拓扑 τ_α.(这里需要指出的是，τ^*是 α^* 上的局部紧，0维，可度量拓扑．)但是每个$(\lambda_\beta,\tau_\beta)$都有上述性质，$\{\tau_\beta:\beta<\alpha\}$单调上升，而$|\alpha^*|=\omega$，这就不难证明上述推断．

③ 若 $\alpha=\beta+1$，这时令 $A=S_\beta$，由于 S_β 是共尾于λ_β 的，因此 A 是$(\lambda_\beta,\tau_\beta)$中的闭离散集．类似于②的方式，取 $B=B_\gamma$ 及 $Z=\lambda_\alpha-\lambda_\beta$，再应用引理4.5.3，即可作出 τ_α.

最后令 $\tau=\bigcup\{\tau_\alpha:\alpha<\omega_1\}$，就完成了$(\omega_1,\tau)$的构造．

(2) 各种性质的验证．

首先我们来证明一个关键性的性质：对任何 $\alpha<\omega_1$，$\mathrm{Cl}(S_\alpha)\supset[\lambda_\alpha,$

ω_1).

固定 α,考虑下述命题:

$$P(\lambda):\forall\beta\in[\lambda_\alpha,\lambda),\text{有 }\beta\in \mathrm{Cl}(S_\alpha).$$

今证明对所有大于 λ_α 的序数 λ,$P(\lambda)$成立.

若 $\lambda=\lambda_\alpha+1$,这时根据$(\lambda_{\alpha+1},\tau_{\alpha+1})$的构造,每个 $\beta\in[\lambda_\alpha,\lambda_{\alpha+1})$都是 S_α 的极限点,所以 $P(\lambda)$成立.

现在假定 $P(\lambda)$已对所有的 $\lambda<\zeta$ 成立,又设 ζ 的邻域是在第 δ 步构造出来的(注意 δ 必定是后继序数),这时有 $\lambda_{\delta-1}\leqslant\zeta<\lambda_\delta$. 而 ζ 是 $\lambda_{\delta-1}$中某个无限子集 B 的极限点,由归纳假设,我们有 $B\subset \mathrm{Cl}(S_\alpha)$. 于是 $\zeta\in \mathrm{Cl}(B)\subset \mathrm{Cl}(S_\alpha)$.

由上述关键性质,可以推出:

① (♣)每个闭(开)集或者是可数的,或者是余可数的.

设 F 是不可数闭集,则由♣,存在 α,使 $S_\alpha\subset F$. 于是$[\lambda_\alpha,\omega_1)\subset \mathrm{Cl}(S_\alpha)\subset F$. 这样 ω_1-F 是可数的.

② (♣)每个闭集都是 G_δ 集.

若闭集 F 是可数的,则存在 α,使 $F\subset\lambda_\alpha$. 子空间$(\lambda_\alpha,\tau_\alpha)$是可度量的,所以 F 是$(\lambda_\alpha,\tau_\alpha)$中的 G_δ 集. 因而是(ω_1,τ)中的 G_δ 集. 若 ω_1-F 是可数的,则开集 ω_1-F 显然是F_σ 集,从而 F 是G_δ 集.

③ (♣)(ω_1,τ)是遗传可分的.

设 S 是不可数子空间,则存在 α,使 $S_\alpha\subset S$. 这样,$\mathrm{Cl}_S(S_\alpha)=S\cap \mathrm{Cl}_\tau(S_\alpha)\supset S\cap[\lambda_\alpha,\omega_1)$,所以 $S-\mathrm{Cl}_S(S_\alpha)\subset\lambda_\alpha$. 于是 $S_\alpha\cup(S\cap\lambda_\alpha)$是 S 中的可数稠密集.

④ (CH)(ω_1,τ)是可数紧的.

设 $B\in[\omega_1]^\omega$,$B=B_\gamma$,$B\subset\lambda_\beta$. 假若存在 α,使 B 与构造 τ_α 时所选中的A_α 之差$B-A_\alpha$ 是有限的,则 A_α 的极限点也必是 B 的极限点. 而 A_α 在子空间λ_α 中由我们的构造是有极限点的,所以 B 不是闭离散集. 假若 B 不属于这种情况,则根据归纳构造的第②条,$B=B_\gamma$ 必定在某一步α(α 是满足$\lambda_\alpha>\alpha^*$ 的一个极限序数)被选中,这时 B 在$(\lambda_\alpha,\tau_\alpha)$中有聚点,因此$(\omega_1,\tau)$没有无限的闭离散集.

⑤ (CH + ♣)((ω_1, τ))是正规的．

设 A, B 是两个不相交的闭集，则由性质①，A, B 中至少有一个是可数集，比如说，A 是可数闭集．这时 A 一定是(ω_1, τ)中的紧集．又(ω_1, τ)是正则的，所以一定有不相交的开集分离 A, B． □

与第二章 Weiss 的定理 2.5.3 对照，即可得到

4.5.5 推论 "∃全正规、可数紧而非紧的空间"这个命题是独立于 ZFC 的． □

通过对归纳构造的步骤作一些修改，Ostaszewski 仅仅用♣而不用 CH，构造出了一个局部紧，0 维，第一可数，全正规，局部可数，非实紧的 S 空间．这个结果与第二章定理 2.10.4 的结论对比，就可看出♣与 MA ω_1 是不相容的．

§6 Vaughan 关于全正规序列紧空间的乘积不是可数紧空间的例子

在拓扑学中，紧、序列紧和可数紧性是三个重要概念，它们彼此之间有密切的联系但又不完全一致．当然，每个紧空间或序列紧空间都是可数紧的，但紧空间不一定是序列紧的，例如 2^c，序列紧空间也不一定是紧的，如 ω_1，它们在乘积保持性上也有很大不同．任意多个紧空间的乘积是紧的，而两个可数紧空间的积可以不是可数紧的．对于序列紧性，由对角线论证可知可数个序列紧空间的乘积是序列紧的．而根据 2^c 非序列紧性，在 CH 下，它已是最好的结果．Scarborough 与 Stone [1966]提出过是否任意一族序列紧空间的乘积是可数紧的问题，他们证明了，若因子空间不超过 ω_1 个，答案是肯定的．另外，在 CH 下，若 X 是一个序列紧空间，$|X| \leqslant c$，则对任何 κ，X^κ 是可数紧的．在第二章 §5，利用 Martin 公理证明了全正则可数紧空间是紧的．所以对于满足 G_δ 性质的空间类，Scarborough-Stone 问题的答案也是肯定的，因此要找出全正则序列紧空间其乘积不是可数紧空间的反例，至少需要一个与 MA ω_1 不相容的集论假设，另外，其因子也必须足够地多(超过 ω_1

个). 本节将介绍 Vaughan 利用◇构造的例子 .

首先,我们介绍 D 极限和 D 紧性两个概念 .

4.6.1 定义 设 $D\in\omega^*$ 是 ω 上的一个自由超滤,X 中的一个序列$\{x_n: n<\omega\}$称为 D 收敛于点 x,如果对 x 的任何一个邻域 U,都有$\{n: n\in U\}\in D$. 这时点 x 称为$\{x_n: n<\omega\}$的 D 极限,记作 $x = D\text{-}\lim x_n$.

若空间 X 中的任何一个序列都存在 D 极限,则 X 称为 D 紧的 .

□

从定义可以看出如下的明显事实:

(1) 若$\{x_n: n<\omega\}$由互不相同的点组成,x 是它的一个 D 极限,则 x 是集$\{x_n: n<\omega\}$的一个聚点 . 从而每个 D 紧空间都是可数紧的 .

(2) 设 D 是ω 上一个自由超滤,则$\bigcap D=\varnothing$. 这时, $\forall k\in\omega$, $\exists F_k\in D$,使 $k\notin F_k$. 于是$\forall n_0\in\omega$, $\{k: k\leqslant n_0\}\notin D$,从而$\{k: k>n_0\}\in D$. 这就表明,若$\{x_n: n<\omega\}$有子序列收敛于点 x,则一定有 $x = D\text{-}\lim x_n$. 所以每个序列紧空间对任何 $D\in\omega^*$ 都是 D 紧的 .

(3) 对任何 $D\in\omega^*$, $X=\beta\omega-\{D\}$是一个可数紧空间 . 然而序列$\{n: n<\omega\}$在 X 中却没有任何 D 极限点,因为$\forall p\in X$,由 $p\neq D$,存在 $U\in p$,使 $U\notin D$. U^* 是 p 的一个邻域,而$\{n: n\in U^*\}=U\notin D$,故 p 不是$\{n: n<\omega\}$的 D 极限 .

(4) 若序列$\{x_n: n<\omega\}$有一个丛点 x,则一定存在一个 $D\in\omega^*$,使得 $x = D\text{-}\lim x_n$. 我们只要对每个 n 和 x 的邻域 U,令

$$A_{Uk}=\{n: n>k, x_n\in U\}.$$

容易验证,$\{A_{Uk}: U$ 是 x 的邻域,$k\in\omega\}$构成一个滤子基,并且它们的交是空集 . 任取 ω 上一个包含它的自由超滤 D,不难验证, $x = D\text{-}\lim x_n$ 成立 .

(5) 若$\{x_n: n<\omega\}\subset X$, $x = D\text{-}\lim x_n$, f 是 X 到 Y 的连续映射,则 $f(x) = D\text{-}\lim f(x_n)$.

(6) 设$\{X_\alpha: \alpha\in A\}$的乘积空间为 X,则 X 是 D 紧的充要条件是每个 X_α 都是 D 紧的 .

证明如下:若 X 是 D 紧的,由(5)即得每个 X_α 是 D 紧的(取 f 为 X

$\to X_\alpha$ 的投影映射). 反过来,设每个 X_α 是 D 紧的, $\{x_n : n\in\omega\}$ 是 X 中一个序列. 对任一 α,设 $x(\alpha)$ 是 $\{x_n(\alpha) : n<\omega\}$ 的 D 极限,记 $x=\{x(\alpha) : \alpha\in A\}\in X$. 对 x 的任何一个基本邻域 $V=\bigcap\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \alpha\in J\}$ $(J\in[A]^{<\omega}$, U_α 为 $p_\alpha(x)=x(\alpha)$ 的邻域),由 $\{n : x_n(\alpha)\in U_\alpha\}\in D$,可知 $\bigcap\{\{n : x_n(\alpha)\in U_\alpha\} : \alpha\in J\}\in D$,即 $\{n : x\in V\}\in D$. 所以 $x=D\text{-}\lim x_n$.

借助于上述事实,可以证明下面一个引理.

4.6.2 引理 $\forall D\in\omega^*$,设 X_D 是一个非 D 紧的空间,则 $X=\prod\{X_D : D\in\omega^*\}$ 不是可数紧的.

证明 $\forall D$,取 X_D 中一个序列 $\{x_n(D) : n<\omega\}$,使它在 X_D 中没有 D 极限. 设 $x_n\in X$,使 x_n 在 X_D 中的坐标为 $x_n(D)$,则由(5),对任一 $D\in\omega^*$, $\{x_n : n<\omega\}$ 不可能有 D 极限. 再由(4)可知, $\{x_n : n<\omega\}$ 不可能有丛点. 这就证明了 X 不是可数紧的. □

下面一个引理与引理 4.5.3 是十分相近的.

4.6.3 引理 设 X 是一个局部紧,0 维,可度量空间, $D\in\omega^*$, $\{x_n : n<\omega\}$ 是 X 中的一个序列,它在 X 中没有 D 极限. 又设 A, B 是 X 的两个闭离散集, $|A|=|B|=\omega$, $A\cap B=\varnothing$, $|X-(A\cup B)|\geqslant\omega$, Z 是一个可数集, $Z\cap X=\varnothing$,则存在 $X\cup Z$ 上一个拓扑,使得

(1) $X\cup Z$ 是局部紧,0 维,可度量空间.

(2) X 作为 $X\cup Z$ 的子空间与原空间一致.

(3) Z 中的每个点同时是 A 和 B 的聚点.

(4) Z 在 $X\cup Z$ 中是闭离散集.

(5) $\{x_n : n<\omega\}$ 在 $X\cup Z$ 中没有 D 极限.

证明 设 $A=\{a_{2n+1} : n<\omega\}$, $B=\{a_{2n} : n<\omega\}$, $\{G_n : n<\omega\}$ 是 X 中的离散紧开集族,使 $a_n\in G_n$. 令

$$V_1=\bigcup\{G_{2k}\cup G_{2k+1} : k<\omega, k\text{ 是偶数}\},$$

$$V_2=\bigcup\{G_{2k}\cup G_{2k+1} : k<\omega, k\text{ 是奇数}\}.$$

开集 V_1 与 V_2 是不相交的,因此 $\{k : x_k\in V_1\}$ 与 $\{k : x_k\in V_2\}$ 是 ω 的互斥集. 由于 D 是一个滤子,这两个集中至少有一个不属于 D,比如说 $\{k : x_k\in V_1\}\notin D$. 这时把 Z 编成 $Z=\{z_{2k}, z_{2k+1} : k<\omega, k\text{ 是偶数}\}$,并把全

体偶数划分成$\{N_{2k}, N_{2k+1}: k < \omega, k$ 是偶数$\}$,使每个 N_k 有 $|N_k| = \omega$. 令 X 在 $X \cup Z$ 中保留原来的拓扑,而定义 Z 中的点的基本邻域集有如下的形式:

$$U_i(z_{2k}) = \{z_{2k}\} \cup [\cup \{G_{2m} \cup G_{2m+1}: m > i, m \in N_{2k}\}],$$

$$U_i(z_{2k+1}) = \{z_{2k+1}\} \cup [\cup \{G_{2m} \cup G_{2m+1}: m > i, m \in N_{2k+1}\}], i < \omega.$$

这样生成的 $X \cup Z$ 的拓扑明显地满足条件(1)~(4).(注意 $X \cup Z$ 有由紧开集组成的σ 离散基,因而是局部紧,0 维,可度量空间 .)因为对每个 $z \in Z$, $\{k: x_k \in U_0(z)\} \subset \{k: x_k \in V_1\}$,所以$\{k: x_k \in U_0(z)\} \notin D$, z 不是$\{x_n: n < \omega\}$的 D 极限 . 因此条件(5)也满足 . □

4.6.4 定理(◇) 存在一族全正规,局部紧,0 维,局部可数,遗传可分,第一可数的可数紧(从而是序列紧的)空间,它们的乘积空间不是可数紧的 .(Vanghan[1976])

证明 利用引理 4.6.3 和与 Ostaszewski 线类似的构造方式,对每个 $D \in \omega^*$,可以构造出一个空间 X_D,它满足定理中所述的全部条件,并附带地有如下性质:序列$\{n: n < \omega\}$在 X_D 中没有 D 极限 .

完成了空间族$\{X_D: D \in \omega^*\}$的构造之后,根据引理 4.6.2,就可断定乘积空间 $\Pi\{X_D: D \in \omega^*\}$不是可数紧空间 . □

如果在构造 X_D 的过程中,当 $\alpha = \beta + 1$ 时,令 $A = \lambda_\alpha$ 以代替 $A = S_\alpha$,那么 X_D 仍可以构造出来,它是局部紧,0 维,第一可数,可数紧和可分的,只是由于用了 CH 而不用♣,X_D 不再是全正规和遗传可分的,当然 $\Pi\{X_D: D \in \omega^*\}$仍然不是可数紧的 .

比 Vaughan 的结果早一年,Rajagopalan 与 Grant Woods 曾用 CH 构造出了乘积不是可数紧的序列紧空间族([1975]). 利用比 CH 稍弱一些的集论假设,也已经构造出这样的例子(Rajagopalan[1976]用 $p = c$; Juhasz, Nagy, Weiss[1979]用 MA; van Douwen[1984]用 $b = c$).

§7 Juhasz 的空间与 Wage 的空间

这一节我们介绍运用◇原理在 $\omega_1 \times \omega$ 上构造出来的两个空间,一

个是 Juhasz 的局部紧,局部可数,遗传可分,正规,非可数仿紧的空间,一个是 Wage 的局部紧,遗传可分,第一可数,可数紧,非正规的空间.它们都是 S 空间,而且 Juhasz 空间同时也是 Dowker 空间的例子,Wage 空间则是所谓的反 Dowker 空间的例子.

4.7.1 定理(◇) 存在 $\omega_1 \times \omega$ 上的一个拓扑 τ,使得

(1) τ 是局部紧 T_2 的.

(2) τ 是局部可数的(从而是 0 维和局部可度量的).

(3) τ 是遗传可分的.

(4) τ 是正规、非可数仿紧的.(Juhasz[1977])

证明 设 $\Lambda = \mathrm{Lim}(\omega_1)$是 ω_1 的全体极限序数的集,$\Lambda = \{\lambda_\alpha : \alpha < \omega_1\}$,$\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$是一个♣序列,并且假定对任何 α,S_α 与 λ_α 共尾.对 $\lambda \in \Lambda$,记 $X_\lambda = \lambda \times \omega$,$X = \bigcup\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = \omega_1 \times \omega$. 又设$[X]^\omega = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$,并且假定这样的排列方式满足如下条件:$\forall \lambda$,$\exists \alpha \times \lambda$,使 $A_\lambda \subset \alpha \times \omega$(根据 CH,并注意到$\forall \alpha > \omega$,$[\alpha \times \omega]^\omega$ 是不可数的,这种要求是可以做到的).

对每一$\langle \alpha, n \rangle$,定义

$$B(\alpha, n) = \{\langle \alpha, n \rangle\} \cup \alpha \times (n+1),$$
$$C(\alpha, n) = (\omega_1 - \alpha) \times (\omega - n).$$

为了定义 τ,先按归纳法,对每个 $\lambda \in \Lambda$,定义 τ_λ 和集 Z_λ,使之满足下列的归纳条件:

① $\forall \sigma \in \lambda \cap \Lambda$,$\tau_\sigma$ 是 X_σ 的一个局部紧 T_2 拓扑.

② $\forall \rho \in \sigma \cap \Lambda$,$\tau_\sigma|_{X_\rho} = \tau_\rho$,并且 $X_\rho \in \tau_\sigma$.

③ $\forall < \alpha, n > \in X_\alpha$,$B(\alpha, n) \in \tau_\sigma$.

④ $\forall \rho, \sigma \in \Lambda$,$\rho \leqslant \sigma < \lambda$,$Z_\rho$ 都是 X_σ 中的有界集和(X_σ, τ_σ)中的开闭集.(Z_ρ 有界是指存在$\alpha < \sigma$,使 $Z_\rho \subset \alpha \times \omega$.)

现在来定义 τ_λ 和 Z_λ. 设 $\lambda = \lambda_\alpha$.

若 α 是极限序数,这时令 τ_λ 为由$\bigcup\{\tau_\sigma : \sigma \in \lambda \cap \Lambda\}$生成的拓扑.显然归纳条件(1) ~ (3)是满足的.由于 $X_\lambda - Z_\rho = \bigcup\{X_\sigma - Z_\rho : \sigma \in \lambda \cap \Lambda\}$,由归纳条件(4),$\forall \rho < \lambda$,$Z_\rho$ 是$(X_\lambda, \tau_\lambda)$的开闭集,而且在 X_λ 中也是有界的.

若 α 不是极限序数,则存在 $\sigma<\lambda,\sigma\in\Lambda$,使 $\lambda=\sigma+\omega$. 由归纳条件(2),我们只需对 $X_\lambda-X_\sigma$ 中的点定义邻域基．

首先把可数集族 $\{Z_\rho:\rho\in\lambda\cap\Lambda\}$ 排成 $\{Z^{(n)}:n<\omega\}$,取一个严格递增的共尾序列 $G^{(\sigma)}=\{\gamma_t:t<\omega\}\subset S_\sigma$. 这时, $\forall\langle\alpha,n\rangle\in X_\sigma$,有 $|B(\alpha,n)\cap(G^{(\sigma)}\times\omega)|<\omega$. 于是由归纳条件(3), $G^{(\sigma)}\times\omega$ 在 (X_σ,τ_σ) 中没有极限点(即它是 (X_σ,τ_σ) 中的闭离散集). 因为 (X_σ,τ_σ) 是 0 维,局部紧和可度量的,所以对任意 $\langle\gamma_t,s\rangle\in G^{(\sigma)}\times\omega$,可以选一个紧开邻域 $K_{t,s}\in\tau_\sigma$,使它们彼此不相交,并且 $K_{t,s}\subset B(\gamma_t,s)$. 另外,还可以假定它们具有如下的性质: $\forall t,s\in\omega$,若 $\langle\gamma_t,s\rangle\notin Z^{(l)}$,则 $K_{t,s}\cap Z^{(l)}=\varnothing$(对 $l<t$). 不然的话,由于 $Z^{(l)}$ 是 (X_σ,τ_σ) 中的开闭集, $K_{t,s}-Z^{(l)}$ 还是开闭集．现在取 $K_{t,s}-\bigcup\{Z^{(l)}:l<t,\langle\gamma_t,s\rangle\notin Z^{(l)}\}$ 作为新的 $K_{t,s}$ 即可．

将 ω 划分成 $\omega=\bigcup\{a_{n,m}:n,m<\omega\}$,使得 $a_{n,m}$ 都是无限集, $X_\alpha-X_\sigma$ 中的每个点有 $\langle\sigma+n,m\rangle$ 的形式．我们定义这个点的第 k 个邻域为

$$V_k(\sigma+n,m)=\{\langle\sigma+n,m\rangle\}\cup[\bigcup\{K_{t,s}:t\in a_{n,m}-k;s\leqslant m\}].$$

不难验证,这些邻域和 τ_σ 一起可以生成 X_λ 的一个局部紧 T_2 拓扑 τ_λ,并且 $\tau_\sigma\subset\tau_\lambda$, $V_0(\sigma+n,m)\subset B(\sigma+n,m)$.

最后, $\forall\rho\leqslant\sigma$, $\exists l<\omega$,使 $Z_\rho=Z^{(l)}$. $Z^{(l)}$ 在 X_σ 中有界,而 $G^{(\sigma)}$ 收敛于 σ,所以对任意 $s<\omega$,当 t 足够大时, $\langle\gamma_t,s\rangle\notin Z^{(l)}$. 因此,根据作法,对任何固定的 n,m,当 k 足够大时,有 $V_k(\sigma+n,m)\cap Z^{(l)}=\varnothing$,因此 $X_\lambda-X_\sigma$ 中没有一个点能是 Z_ρ 的极限点．所以 Z_ρ 在 (X_λ,τ_λ) 中仍是开闭集．

现在我们来定义 Z_λ. 为此考虑集 A_λ. 若 A_λ 不是 (X_λ,τ_λ) 中的闭集,则令 $Z_\lambda=\varnothing$;若 A_λ 是 τ_λ 闭的,取最小的 α,使 $A_\lambda\subset\alpha\times\omega$. 由归纳条件(3), $\alpha\times\omega$ 是 τ_λ 开集(注意 $\alpha\times\omega=\bigcup\{B(\beta,n):\beta<\alpha,n<\omega\}$). 由于 (X_λ,τ_λ) 是局部紧, T_2, 0 维,可度量空间,可以取一个 τ_λ 开闭集 Z_λ,使 $A_\lambda\subset Z_\lambda\subset\alpha\times\omega$. 这就完成了归纳过程．

令 τ 是由 $\bigcup\{\tau_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 生成的 X 的拓扑,下面我们来证明这样构造的空间 (X,τ) 具有定理所述的各项性质．

基本性质：$\forall \sigma \in \Lambda, n \in \omega, \mathrm{Cl}_\tau(S_\sigma \times \{n\}) \supset C(\sigma, n)$.

证明如下：设 $n' \geq n$，由 $V_k(\sigma + m, n') \supset \bigcup\{K_{t,s}: t \in a_{m,n'} - k, s \leq n'\}$ 及 $a_{m,n'}$ 是无限集，存在 $t \in a_{m,n'} - k$，使得 $\langle \gamma_t, n \rangle \in K_{t,n} \subset V_k(\sigma + m, n')$. 这说明 $\forall m < \omega, n' > n, \langle \sigma + m, n' \rangle \in \mathrm{Cl}_\tau(G^{(\sigma)} \times \{n\}) \subset \mathrm{Cl}_\tau(S_\sigma \times \{n\})$. 于是 $(\sigma + \omega - \sigma) \times (\omega - n) \subset \mathrm{Cl}_\tau(S_\sigma \times \{n\})$. 下面按归纳法来证明，$\forall \lambda \in \Lambda - (\sigma + \omega), \langle \lambda + m, n' \rangle \in \mathrm{Cl}_\tau(S_\sigma \times \{n\})$，对所有的 $m < \omega$ 和 $n' \geq n$ 都成立．当 $\lambda = \sigma$ 时，这个结论刚才已经证明，现在假设对所有的 $\lambda' < \lambda$ 结论成立．用与上述证明相同的方式可以证明，$\langle \lambda + m, n' \rangle \in \mathrm{Cl}_\tau(G^{(\lambda)} \times \{n\})$ 对所有 $m < \omega$ 和 $n' \geq n$ 成立．注意 $G^{(\lambda)} \cap \sigma$ 是有限的，所以有 $\langle \lambda + m, n' \rangle \in \mathrm{Cl}_\tau((G^{(\lambda)} - \sigma) \times \{n\})$. 但是对任意 $\lambda' < \lambda$，由归纳假设，有 $\langle \lambda' + m, n' \rangle \in \mathrm{Cl}_\tau(S_\sigma \times \{n\})$. 于是有

$$(G^{(\lambda)} - \sigma) \times \{n\} \subset \mathrm{Cl}_\tau(S_\sigma \times \{n\}).$$

从而 $\langle \lambda + m, n' \rangle \in \mathrm{Cl}_\tau((G^{(\lambda)} - \sigma) \times \{n\}) \subset \mathrm{Cl}_\tau(S_\sigma \times \{n\})$. 这也就证明了 $C(\sigma, n) \subset \mathrm{Cl}_\tau(S_\sigma \times \{n\})$.

(X, τ) 的局部紧 T_2 性和局部可数性是很明显的．

(X, τ) 是遗传可分的．

设 Y 是 X 的不可数子空间，则存在最小的 n，使 $Y \cap (\omega_1 \times \{n\})$ 是不可数的．由于 $\{S_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ 是♣序列，存在 σ，使 $S_\sigma \times \{n\} \subset Y$. 由 n 的最小性，可知 $Y \cap (\omega_1 \times n)$ 是可数集．根据基本性质，$[Y \cap (\omega_1 \times n)] \cup [Y \cap X_\sigma]$ 就是 Y 的一个可数稠密集．

(X, τ) 是正规的．

由上面论证看出，任何一个不可数闭集必然包含某个 $S_\sigma \times \{n\}$. 再由基本性质，它将包含 $C(\sigma, n)$. 但对任何 $\langle \sigma', n' \rangle \neq \langle \sigma, n \rangle$，$C(\sigma', n') \cap C(\sigma, n) \neq \varnothing$．这说明 X 中任何一对不相交的闭集 H, K 至少有一个是可数集．现在假设 H 是可数集，这时存在 $\lambda \in L$，使 $H = A_\lambda$. 根据作法，还存在 $\alpha < \lambda$ 和 Z_λ，使 $H = A_\lambda \subset Z_\lambda \subset \alpha \times \omega = X_\lambda$. X_λ 是可度量的，H 和 $K \cap X_\lambda$ 是 X_λ 中不相交的闭集，所以存在 $U, V \in \tau_\lambda \subset \tau$，$U \cap V = \varnothing$，使 $H \subset U$，$K \cap X_\lambda \subset V$. 这时 $U \cap Z_\lambda$ 与 $V \cup (X - Z_\lambda)$ 就是包含 H 和 K 的不相交开集．

(X,τ)不是可数亚紧的.

记 $F_n=C(0,n)=\omega_1\times(\omega-n)$，则$\{F_n:n<\omega\}$是$(X,\tau)$中的单调下降闭集序列，并且$\bigcap\limits_n F_n=\varnothing$. 假设$\{G_n:n<\omega\}$是满足 $F_n\subset G_n$ 的开集序列，则 $\omega_1\times\{0\}-G_n$ 必定是可数集. 否则的话，如上所述，必存在σ，使 $C(\sigma,0)\subset\omega_1\times\{0\}-G_n$. 这与 $F_n\subset G_n$ 矛盾(因为 $F_n=C(0,n)$与$C(\sigma,0)$一定相交)，这就表明了$\bigcap\limits_n G_n\supset\omega_1\times\{0\}-\bigcup\limits_n(\omega_1\times\{0\}-G_n)\neq\varnothing$. □

4.7.2 定理(◇) 存在 $\omega_1\times\omega$ 上的一个拓扑τ，使得

(1) τ 是局部紧 T_2 的.

(2) τ 是局部可数的.

(3) τ 是第一可数、可数紧的.

(4) τ 是遗传可分的.

(5) τ 是全的.

(6) τ 不是正规的. (Wage[1976a])

证明 记 $X=\omega_1\times\omega$, $X_\alpha=\alpha\times\omega$, $C_n=\omega_1\times\{n\}$, $\Lambda=\{\lambda:\lambda<\omega_1$是极限序数$\}$. 又设$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是$[X]^\omega$ 中所有满足下列条件的集：或者$\forall n$, $|A_\lambda\cap C_n|\leqslant1$，或者$\exists n$，使 $A_\lambda\subset C_n$，而且 $\operatorname{Sup}A_\lambda<\lambda$.

作一个从 Λ 到ω 的映射j 如下：

$$j(\lambda)=\begin{cases}0,\text{若}\ \forall n, |A_\lambda\cap C_n|\leqslant1,\\ n,\text{若}\ \exists n, A_\lambda\subset C_n.\end{cases}$$

设$\{S_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是一个♣序列，使它满足$\forall\lambda\in\Lambda$, $\operatorname{Sup}A_\lambda<\operatorname{Inf}S_\lambda$(否则，我们可以用 $S_\lambda-(\operatorname{Sup}A_\lambda+1)$来代替 S_λ，它们仍构成一个♣序列).

任取一个函数 $p:\Lambda\to2$，使 $p^{-1}(0)$, $p^{-1}(1)$都是不可数的.

归纳地定义 X_λ 上的拓扑τ_λ，使之满足下列条件：

① $\forall\xi\in\Lambda\cap\lambda$, $\tau_\xi=\tau_\lambda\cap\mathscr{P}(X_\xi)$.

② τ_λ 是局部紧 T_2 和第一可数的.

③ $\forall\alpha<\lambda$, $X_\alpha\in\tau_\lambda$.

④ $\forall n$, $C_n\cap X_\lambda$ 是$(X_\lambda\cdot\tau_\lambda)$中的闭集，并且 $n>1$ 时，$C_n\cap X_\lambda$ 是(X_λ,τ_λ)中的开集.

首先，对 $\omega \in \Lambda$，定义 τ_ω 为 $\omega \times \omega$ 上的离散拓扑．

设 $\eta \in \Lambda$，假定对所有 $\lambda \in \Lambda \cap \eta$ 都已定义好 τ_λ，使条件①～④满足．

若 η 在 Λ 中是极限数，则由①，必然要求 τ_η 是由 $\bigcup\{\tau_\lambda : \lambda \in \eta \cap \Lambda\}$ 生成的拓扑．这时对 η 来说，条件①～④还是满足的．

另一种情况是存在 $\xi \in \Lambda$，使 $\eta = \xi + \omega$．若 $n \neq j(\xi)$，即 $A_\xi \not\subset C_n$，或者 A_ξ 在 (X_ξ, τ_ξ) 中有极限点，则令 $D_n = S_\xi \times \{n\}$．若 A_ξ 在 (X_ξ, τ_ξ) 中没有极限点，则令 $D_{j(\xi)} = (S_\xi \times \{j(\xi)\}) \cup A_\xi$．将 D_n 排列成 $\{d(k, n): k < \omega\}$，将 S_ξ 按递增次序排列成 $\{S(k, \xi): k < \omega\}$．由条件②，$(X_\xi, \tau_\xi)$ 是 0 维，局部紧，可度量空间，由条件③，并注意 S_ξ 与 ξ 共尾，$\forall \alpha < \xi$，$X_{\alpha+1}$ 是 $\langle \alpha, n \rangle$ 的开邻域，它只包含 D_n 的有限个点，所以 D_n 是 (X_ξ, τ_ξ) 中的闭离散集．由条件④，$\forall k, \eta < \omega$，可以选择 $U(k, n)$ 和 $V(k)$ 使得：

(a) $U(k, n)$ 和 $V(k)$ 都是 X_ξ 中的紧开子集，它们分别包含 $d(k, n)$ 和 $\langle S(k, \xi), k \rangle$．

(b) $\forall n$，$\bigcup\{U(k, n): k < \omega\}$ 和 $\{V(k): k < \omega\}$ 都是 X_ξ 中的闭集，因而 $\{U(k, n): k < \omega\}$ 和 $\{V(k): k < \omega\}$ 在 X_ξ 中是离散的．

(c) 当 $n = 0$ 或 1，而 $m < \omega$ 时，$V(k) \cup U(k, n)$ 除有限个 k 外都包含在 $X - \bigcup\{C_n : 2 \leqslant n \leqslant m\}$ 内．

(d) 当 $n > 1$ 时，$\forall k$，$U(k, n) \subset C_n$．

将 ω 划分成 ω 个无限片段 $P_i (i < \omega)$，现在定义 $X_\eta - X_\xi$ 中各点的邻域如下：

若 $\langle i, n \rangle \neq \langle 0, p(\xi) \rangle$，定义点 $\langle \xi + i, n \rangle$ 的第 m 个邻域为 $B(\xi + i, n, m) = \bigcup\{U(k, n): k \in P_i, m < k\} \cup \{\langle \xi + i, n \rangle\}$．

定义点 $\langle \xi, p(\xi) \rangle$ 的第 m 个邻域为

$B(\xi, p(\xi), m) = \bigcup\{U(k, n): k \in P_0, k > m\} \cup \{\langle \xi, p(\xi) \rangle\} \cup [\bigcup\{V(k): m < k\}]$．

最后定义 τ_η 为由 $\tau_\xi \cup [\bigcup\{B(\xi + i, n, m): i, m, n < \omega\}]$ 生成的 X_η 的拓扑．则 (X_η, τ_η) 仍满足条件①～④．

令 τ 是由 $\bigcup\{\tau_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 生成的 X 的拓扑，容易验证，(X, τ) 是局

部紧,0维,局部可数,第一可数和可数紧的空间

有下面的论断:若 $D\subset X$ 是闭集,则 $\forall n$,或者 $D\cap C_n$ 是可数集,或者 C_n-D 是可数集.

证明如下:假若 $D\cap C_n$ 是不可数的,则由♣,存在 λ,使 $S_\lambda\times\{n\}\subset D\cap C_n$.但是由我们的构造方法,应当有 $(\omega_1-\lambda)\times\{n\}\subset \mathrm{Cl}(S_\lambda\times\{n\})$.所以 C_n-D 是可数的.

由上述论断可以看出 X 是遗传可分的.因为对任何 $Y\subset X$,记 $Y_n=Y\cap C_n$,若 Y_n 是不可数的,则存在 $\lambda_n\in\Lambda$,使 $S_{\lambda_n}\times\{n\}\subset Y_n$.于是 $\mathrm{Cl}(S_{\lambda_n}\times\{n\})\supset Y_n$,所以 $\bigcup\limits_n Y_n$ 有可数稠密集,即 Y 是可分的.

为了证明 X 不是正规的,只需证明闭集 C_0 与 C_1 在 X 中不能分离.假定 U_0 和 U_1 是分别包含 C_0 和 C_1 的开集.由上述构造方法,存在不可数个 ξ,使 U_0 包含 $\{S(n,\xi):n<\omega\}$ 的尾部.从论断得知,存在 k 和 $\alpha<\omega_1$,使 $\{\langle\beta,i\rangle:\alpha<\beta,k<i\}\subset U_0$.但 U_1 也必须包含有这样一个尾部,所以 U_0 与 U_1 必然有交点.

最后证明 X 是全的.由论断可知,子空间 C_n 的任何一个相对闭集或者是可数的或者是余可数的,因而 C_n 任何一个开集也是可数或余可数的.设 G 是 X 中的开集,对每个 n,$G\cap C_n$ 是 C_n 中的相对开集.若 $G\cap C_n$ 是可数集,则 $G\cap C_n$ 是 C_n 中的 F_σ 集,从而也是 X 中的 F_σ 集.若 $G\cap C_n$ 是余可数集,则 C_n-G 是 C_n 中的,从而也是 X 中的可数闭集.利用 X 的局部可数性,可以证明它是 X 中的 G_δ 集,于是 $G\cap C_n$ 仍是 X 中的 F_σ 集.这样就证明了 $G=\bigcup\limits_n(G\cap C_n)$ 是 X 的 F_σ 集. □

§8 Wage 与 Ginsburg 的极不连通的 S 空间

这一节,我们将指出,仅仅用♣就可以作出全正规的极不连通的 S 空间,其中一个是 Wage 作的,另一个是 Ginsburg 作的.

4.8.1 定理(♣) 存在一个全正规,极不连通的 S 空间.(Wage[1976b])

证明 设 $\{S_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是♣序列.我们要作的空间的装备集是 ω_1,

方法是按归纳方式在 $\lambda\in\Lambda$ 上定义拓扑 τ_λ，使它满足如下的归纳条件：

(1) (λ,τ_λ)是极不连通的正规空间．

(2) $\forall\alpha<\lambda,\alpha\in\tau_\lambda$．进而言之，若 $\xi\in\lambda\cap\Lambda$，则 $\tau_\xi=\tau_\lambda\cap\mathscr{P}(\xi)$．

(3) $\forall\xi\in\lambda\cap\Lambda,\xi<\eta<\lambda$，有 $\eta\in\mathrm{Cl}_{\tau_\lambda}(S_\xi)$．

当 $\xi=\omega$ 时，取 τ_ξ 为 ω 的离散拓扑．现在假设 $\forall\xi\in\lambda\cap\Lambda$，$\tau_\xi$ 都已定义好，并且满足上述各条件，我们来构造 τ_λ．分两种情况讨论．

① 若 λ 是极限序数的极限，此时简单地令 τ_λ 是由 $\bigcup\{\tau_\xi:\xi\in\lambda\cap\Lambda\}$生成的拓扑．由于$\bigcup\{\tau_\xi:\xi\in\lambda\cap\lambda\}$对有限交封闭，它是 τ_λ 的一个基．对 τ_λ 来说，条件(2)和(3)是显然成立的．

为了验证条件(1)，首先注意，对任意 $A\subset\xi$，$\mathrm{Cl}_{\tau_\xi}A$ 与 A 在(λ,τ_λ)的子空间 ξ 中的闭包，即$(\mathrm{Cl}_{\tau_\lambda}A)\cap\xi$ 是一致的．

(λ,τ_λ)是极不连通的．设 $U\in\tau_\lambda$，记 $\overline{U}=\mathrm{Cl}_{\tau_\lambda}U$，若 $\alpha\in\overline{U}$，则存在 $\xi\in\lambda\cap\Lambda$，使 $\alpha\in\xi$. 于是 $\alpha\in\xi\cap\overline{U}$. 因为 $U=(U\cap\xi)\cup(U-\xi)$，而 ξ 是包含α 的开邻域，$\xi\cap(U-\xi)=\varnothing$，所以 $\alpha\in\xi\cap\overline{(U\cap\xi)}=\mathrm{Cl}_{\tau_\xi}(U\cap\xi)$，$U\cap\xi$ 是(ξ,τ_ξ)中的开集．由(ξ,τ_ξ)的极不连通性，知 $\xi\cap\overline{(U\cap\xi)}\in\tau_\xi\subset\tau_\lambda$，由$\overline{U\cap\xi}\subset\overline{U}$，可知 $\alpha\in\mathrm{Int}\overline{U}$. 所以 $\overline{U}$ 是(λ,τ_λ)中的开集．

(λ,τ_λ)是正则的．设 $\alpha\in U\in\tau_\lambda$．由 $\alpha+1<\lambda$ 及条件(2)，$\alpha+1$ 是 α 的开邻域，所以不妨假设 $U\subset\alpha+1$. 设 $\xi=\alpha+\omega$. 因为(ξ,τ_ξ)是正则和极不连通的，所以存在(ξ,τ_ξ)中的开闭集 $V\in\tau_\xi$，使 $\alpha\in V\subset U$. 显然 $V\in\tau_\lambda$. 下面证明 $V=\overline{V}=\mathrm{Cl}_{\tau_\lambda}V$. 考虑 $\xi-V$，因为 $V\subset\alpha+1$，所以 $S_\xi\cap V$ 是有限的，由条件(3)得知 $\lambda-\xi\subset\mathrm{Cl}_{\tau_\lambda}(S_\xi-V)$. 由 $\xi-V\subset\lambda-V$ 及$\lambda-V$是τ_λ 中的闭集，可知$(\xi-V)^-\subset\lambda-V$. 另一方面，$\lambda-V=(\lambda-\xi)\cup(\xi-V)\subset\mathrm{Cl}_{\tau_\lambda}(S_\xi-V)\cup(\xi-V)\subset\mathrm{Cl}_{\tau_\lambda}(\xi-V)$，所以 $\lambda-V=(\xi-V)^-$. 因为 V 在 τ_ξ 中是闭的，所以 $\xi-V\in\tau_\xi$，从而 $\xi-V\in\tau_\lambda$. 由 τ_λ 是极不连通的，有 $\mathrm{Cl}_{\tau_\lambda}V\cap\mathrm{Cl}_{\tau_\lambda}(\xi-V)=\varnothing$，从而有 $\mathrm{Cl}_{\tau_\lambda}V=V$. 于是 V 是(λ,τ_λ)中的开闭集．

因为 λ 是可数集，所以(λ,τ_λ)是正则 Lindelöf 空间，从而是正规

的.条件(1)也成立．

② 存在 $\xi\in\Lambda$,使 $\lambda=\xi+\omega$.

将 S_ξ 划分成ω 个部分,设为$\{W_n:n<\omega\}$,使得$\forall n$, W_n,都与 ξ 共尾,W_n 互不相交,$S_\xi=\bigcup_n W_n$.

$\forall n$,取定 W_n 上一个自由超滤 $\mathscr{F}_n$. 记

$$\mathscr{B}_n=\{\{\xi+n\}\cup U:U\in\tau_\xi \text{ 是开闭集}, U\cap W_n\in\mathscr{F}_n\},$$

$$\mathscr{B}=\bigcup_n\mathscr{B}_n.$$

令 τ_λ 是由 $\tau_\xi\cup\mathscr{B}$生成的拓扑,我们来验证:

(a) (λ,τ_λ)是极不连通的．设 $U\in\tau_\lambda$, $\alpha\in\overline{U}$. 若 $\alpha\in\xi$,则由 $\alpha\in\overline{U}$,得 $\alpha\in\mathrm{Cl}_{\tau_\xi}(U\cap\xi)$. 由$(\xi,\tau_\xi)$极不连通,有 $\mathrm{Cl}_{\tau_\xi}(U\cap\xi)\in\tau_\xi$,从而也是$(\lambda,\tau_\lambda)$中的开集．然而 $\mathrm{Cl}_{\tau_\xi}(U\cap\xi)=\overline{U\cap\xi}\cap\xi\subset\overline{U\cap\xi}\subset\overline{U}$,所以 $\alpha\in\mathrm{Int\ Cl}_{\tau_\lambda}U$.

若 $\alpha=\xi+n$,由以上所证,可知 $\overline{U}\cap\xi$ 是 τ_λ 中的开集．若 $\overline{U}\cap\xi\cap W_n=\overline{U}\cap W_n\notin\mathscr{F}_n$,则$(\xi-\overline{U})\cap W_n=W-\overline{U}\in\mathscr{F}_n$. 但 $\xi-\overline{U}$ 是 τ_ξ 中的开闭集,依定义有$\{\xi+n\}\cup(\xi-\overline{U})\in\mathscr{B}_n$. 但是$(\xi-\overline{U})\cap U=\varnothing$,这与 $\alpha\in\overline{U}$ 矛盾,因此 $\overline{U}\cap W_n\in\mathscr{F}_n$ 成立．所以$\{\alpha\}\cup(\overline{U}\cap\xi)$是 α 的 τ_λ 邻域,它包含于 $\overline{U}$ 内．这便证明了 $\overline{U}$ 是(λ,τ_λ)中的开闭集．

(b) (λ,τ_λ)是正则的．由归纳条件,(ξ,τ_ξ)是正规的,注意,$\forall\alpha\in S_\xi$,由条件(2),$\alpha+1\in\tau_\xi$,而 $S_\xi\cap(\alpha+1)$是有限集,所以$[(\alpha+1)-(S_\xi\cap\alpha)]\cap S_\xi=\{\alpha\}$,这说明 S_ξ 是(ξ,τ_ξ)中的离散集．又因 S_ξ 与ξ共尾,再由条件(2),可知 S_ξ 是(ξ,τ_ξ)中的闭离散集．由(ξ,τ_ξ)的正规性及 S_ξ 可数性,存在一个由(ξ,τ_ξ)中的开闭集组成的离散族 $\mathscr{U}=\{V(s):s\in S_\xi\}$分离 S_ξ. 我们只需就 $\xi+n$ 型的点验证正则性即可．设 $B=\{\xi+n\}\cup U\in\mathscr{B}_n$,注意作为 S_ξ 的子集的 W_n 是闭的,U 既是开集也是闭集,所以 $U\cap W_n$ 是(ξ,τ_ξ)中的闭集．由正规性及极不连通性,存在 $V\in\tau_\xi$,使 $U\cap W_n\subset V=\mathrm{Cl}_{\tau_\xi}V\subset U$. 令 $H(s)=V(s)\cap V$,则$\{H(s):s\in U\cap W_n\}$是一个由开闭集组成的离散族．令 $H=\bigcup\{H(s):s\in U\cap W_n\}$,则$\{\xi+n\}\cup H$ 是$\xi+n$ 在τ_λ 中的一个基本邻域(易见 $H\cap W_n=U$

$\cap W_n \in \mathscr{F}_n$). 而 $\overline{H} \subset \{\xi + n\} \cup U = B$, 这是因为 $\{H(s): s \in U \cap W_n\} \cup \{V(s): s \in S_\xi, s \notin U \cap W_n\}$ 仍是 (ξ, τ_ξ) 中的离散开闭集族, 所以当 $m \neq n$ 时, $\xi + m \notin \overline{H}$.

这样, 我们就证明了 (τ, τ_λ) 满足条件(1). 至于条件(2)、(3)是容易验证的, 在此不细述了.

最后, 令 τ 为由 $\cup\{\tau_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 生成的 ω_1 上的拓扑. 用类似于①中所述的方式可以证明 (ω_1, τ) 是一个极不连通的正则空间.

设 C 是 (ω_1, τ) 中任一个不可数闭集, 由♣, 存在 $\xi \in \Lambda$, 使 $S_\xi \subset C$. $\forall \alpha > \xi$, 若 $\alpha \notin \mathrm{Cl}_\tau S_\xi$, 则由于 $\cup\{\tau_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 是 (ω_1, τ) 的基, 存在 $\lambda \in \Lambda$ 和 $U \in \tau_\lambda$, 使 $\alpha \in U$, 而且 $U \cap S_\xi = \varnothing$. 这样就有 $\alpha \notin \mathrm{Cl}_{\tau_\lambda} S_\xi$, 这与条件(3)是矛盾的, 从而表明了 $\omega - \xi \subset C$, 即 C 是余可数的. 由此可以断言 (ω_1, τ) 是遗传可分的. 又因为每个 α 都是 (ω_1, τ) 中的开集, 所以 (ω_1, τ) 不是 Lindelöf 空间.

为了证明 (ω_1, τ) 是全正规的, 我们先分别证明三个引理.

4.8.2 引理 若 X 是极不连通的 S 空间, 则 X 是遗传正规的.

证明 设 H, K 是两个隔离子集(即 $\overline{H} \cap K = H \cap \overline{K} = \varnothing$). 因为 X 是遗传可分的, 所以存在可数集 $D \subset H, E \subset K$, 使 D, E 分别是 H, K 中的稠密集. 又因为 D, E 是正则空间 X 中的可数隔离集, 所以存在互不相交的开集 U 和 V, 使 $D \subset U, E \subset V$. 由 X 的极不连通性, 可知 $\overline{U}, \overline{V}$ 是 X 中互不相交的开集, 所以 $\overline{U}, \overline{V}$ 分离 H 和 K. 根据 Engelking[1977] 的 2.1.7, X 是遗传可分的.

4.8.3 引理 设 X 是极不连通的 S 空间, $H \subset X$ 是闭集, $U \subset X$ 是开集, 而 $H \cap U$ 在 H 中稠密, 则 $H \cup U$ 是开集.

证明 假设 $H \cup U$ 不是开集, 则存在 $h \in H$, 使 $h \in (X - (H \cup U))^-$. 设 D 是 $H \cap U$ 的可数稠密子集, E 是 $X - (H \cup U)$ 的可数稠密子集. 由于 D, E 是 X 中隔离的可数子集($\overline{D} = H$, 有 $\overline{D} \cap E = \varnothing$; $\overline{E} \subset (X - U)^- = X - U$, 有 $\overline{E} \cap D = \varnothing$), 由 X 的正则性和极不连通性, 存在互不相交的开闭集 A, B, 使 $\overline{D} \subset A$, $(X - (H \cup U))^- \subset B$. 于是有 $h \in H \subset \overline{D} \subset A$, $h \in (X - (H \cup U))^- \subset B$. 这是矛盾的, 因此证明了 $H \cup U$ 是开集.

4.8.4 引理 设 X 是极不连通的 S 空间．若 X 的每个可数集都是 G_δ 集，则 X 的每个闭集都是 G_δ 集．

证明 设 H 是 X 中的闭集，$D \subset H$ 是可数集，使 $\overline{D} = H$. 由引理假设，存在可数个开集 $\{U_n\}$，使 $\bigcap\{U_n : n < \omega\} = D$. 再由引理 4.8.3, $V_n = H \cup U_n$ 是开集，显然有 $\bigcap\{V_n : n < \omega\} = H \cup (\bigcap\{U_n : n < \omega\}) = H \cup D = H$. 这便证明了 H 是 G_δ 集．

由引理 4.8.2 得出 (ω_1, τ) 是正规的．因为 (ω_1, τ) 是局部可数的，所以它的任何可数子集都是 G_δ 集．应用引理 4.8.4 即得出 (ω_1, τ) 是全正规的．

定理 4.8.1 至此证毕． □

前面各个例子，都是在一个事先没有给定拓扑结构的集上通过归纳方式构造出所需要的拓扑的．与此不同，下面将要介绍的 Ginsburg 的例子，则是在某一种可数紧空间中通过精心选择一个 ω_1 序列，使它作为原拓扑空间的子空间，具备所需要的性质．

4.8.5 定理(♣) 设 X 是一个正则的可数紧空间，X 不包含任何非平凡的收敛序列，则 X 包含有一个极不连通的，全的 S 空间．(Ginsburg[1977a])

证明 设 $\{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是♣序列，我们将归纳地选出一个点列 $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset X$ 和 X 中的开集序列 $\{G_\alpha : \alpha < \omega_1\}$，使之满足下列归纳条件：

(1) $\forall \alpha, x_\alpha \in G_\alpha$.

(2) $\alpha < \beta \Rightarrow x_\beta \notin G_\alpha$.

(3) $\forall \lambda \in \Lambda, n < \omega, x_{\lambda+n} \in \mathrm{Cl}\{x_\alpha : \alpha \in S_\lambda\}$.

对 ω，选出 X 中一个可数离散子集 $\{x_n : n < \omega\}$ 和开集序列 $\{G_n : n < \omega\}$，使 $x_n \in G_n$，并且 $m \neq n$ 时，$x_m \notin G_n$.

现在假设对所有 $< \lambda$ 的极限序数 ξ，我们都已选好了 $Y_\xi = \{x_\alpha : \alpha < \xi\}$ 和 $\mathscr{G}_\xi = \{G_\alpha : \alpha < \xi\}$，它们满足 $\xi < \eta < \lambda \Rightarrow Y_\xi \subset Y_\eta, \mathscr{G}_\xi \subset \mathscr{G}_\eta$ 和条件 (1) ~ (3).

若 λ 是极限序数的极限，则令 $Y_\lambda = \bigcup\{Y_\xi : \xi < \lambda\}$, $\mathscr{G}_\lambda = \bigcup\{\mathscr{G}_\xi : \xi < \lambda\}$. 这时条件 (1) ~ (3) 对 λ 还是满足的．

若 $\lambda = \xi + \omega$，其中 $\xi \in \Lambda$，记 $R_\xi = \{x_\alpha : \alpha \in S_\xi\} \subset Y_\xi$, X 是可数紧

的，R_ξ 在 X 中有聚点．由于 X 不包含任何非平凡收敛序列，可知 R_ξ 有无限多(实际上是不可数)个聚点．于是 $\mathrm{Cl}R_\xi - R_\xi$ 包含有无限的离散点集．从中选出点列 $\{x_{\xi+n}: n<\omega\}$ 和开集序列 $\{G_{\xi+n}: n<\omega\}$，使 $m\neq n$ 时，有 $x_{\xi+m} \overline{\in} G_{\xi+n}$．然后令 $Y_\lambda = Y_\xi \cup \{x_{\xi+n}: n<\omega\}$，$\mathscr{G}_\lambda = \mathscr{G}_\xi \cup \{G_{\xi+n}: n<\omega\}$．

条件(1)和(3)显然是满足的，今验证条件(2)也满足，这只需证明 $\forall n<\omega, \alpha<\xi, x_{\xi+n} \overline{\in} G_\alpha$ 即可．注意 $S_\xi \cap \alpha$ 是有限的，由条件(2)(相对于 Y_ξ)至多有有限个 $x_\beta \in R_\xi$，使 $x_\beta \in G_\alpha$，所以 $G_\alpha \cap R_\xi$ 是有限的．但是 $x_{\xi+n} \in \mathrm{Cl}R_\xi - R_\xi$，所以 $x_{\xi+n} \overline{\in} G_\alpha$．

最后令 $Y = \bigcup\{Y_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$，$\mathscr{G} = \bigcup\{\mathscr{G}_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$．

由条件(2)和(1)，子空间 Y 是右分离的，故它不是 Lindelöf 空间．由条件(3)及♣，Y 是遗传可分的，Y 的每个闭子集或者是可数集，或者是余可数集，所以 Y 是全的． □

为了作出一个极不连通的全正规 S 空间，需要选取一类特殊的可数紧空间．为此，我们注意下列事实：

1．F 空间的定义及如下的等价命题：X 是 F 空间当且仅当每个余零集都是 C^* 嵌入的(见定义 1.9.12)．

2．若 X 是局部紧的 σ 紧空间，则 $\beta X - X$ 是紧 F 空间(Gillman, Jerison[1960]14.27)．

3．F 空间不包含任何非平凡的收敛序列(Gillman, Jerison[1960], 14N1)．

4．F 空间中每个可数子集都是 C^* 嵌入的(Gillman, Jerison[1960], 14N5)．

利用上述事实，就可以证明下面的定理．

4.8.6 定理(♣) 若 X 是可数紧 F 空间，则 X 包含有一个遗传，极不连通，全正规的 S 空间．(Ginsburg[1977a])

证明 由定理 4.8.5，X 包含有一个全的 S 空间 Y．今证明 Y 是遗传极不连通和遗传正规的．根据 Gillman, Jerison[1960]中的 1H 和 3D，一个完全正则空间是极不连通的，当且仅当它的每个开子集是 C^* 嵌入的；它是正规的，当且仅当它的每个闭子集是 C^* 嵌入的．对 Y 的任

何一个子空间 Z,设 f 是 Z 上一个有界连续函数.因 Y 遗传可分,故存在可数集 $D\subset Z$,使 $\overline{D}=Z$.$f\restriction_D\in C^*(D)$.根据事实 4,存在 $F\in C^*(X)$,使 $F\restriction_D=f\restriction_D$.因 D 在 Z 上稠密,故有 $F\restriction_Z=f$.于是 Z 是 C^* 嵌入 Y 的.这表明 Y 是遗传极不连通和遗传正规的. □

要注意的是,虽然 Y 是从一个可数紧空间 X 中划出来的,但 Y 本身是不会成为可数紧的(参看 Ginsburg[1977a]2.4).

因为 **N** 和 **R** 都是局部紧和 σ 紧的,所以有下述推论.

4.8.7 推论(♣) $\beta\mathbf{N}-\mathbf{N}$ 和 $\beta\mathbf{R}-\mathbf{R}$ 都包含有全正规,极不连通的 S 空间. □

§9 后 记

在本书的第一章至第四章中,我们比较系统地介绍了 CH,弱连续统假设,MA,SH,◇等几种常用的,并已证明是富有成果的集论命题及其在解决点集拓扑学一些疑难问题上的应用.随着研讨的深入,20 世纪 70 年代中后期,又进一步开发出了一些与◇相类似的集论命题,并成功地应用到了拓扑学研究中,如◇*,◇+,◇++ 等.这一节,我们将简略地介绍它们以及有关 **V = L** 的某些应用成果.

一、◇的其他一些应用

1.我们知道,要使两个不全是可度量的空间 X 与 Y 的乘积是遗传正规或全正规的,对因子空间所要求的条件往往是很苛刻的.Katetov 定理指出:若 $X\times Y$ 是遗传正规的,则要么 X 的每个可数子集都是闭集,要么 Y 是全正规的.又如 Alexandroff 双箭空间,尽管它本身是全正规的紧空间,但它的平方却不是遗传正规的.另外,已经知道一个全正规紧空间与一个紧度量空间的乘积是全正规的,所以自然会问,这是否是唯一可能的答案? 1979 年 Rudin 证明了:若◇成立,则存在两条 Suslin 线,它们的乘积是全正规的(Rudin[1979a]).这就否定了上述猜测.

2.众所周知,若 X 是可数紧空间,而 X^2 是全正规的,则由著名的 Chaber 定理,X 一定是紧度量空间.与之相应的有两个问题:

问题 1　若 X 是紧的而 X^2 遗传正规(比全正规弱),那么,X 是否一定是可度量的?

问题 2　若 X 是可数紧的而 X^2 是遗传正规的,那么,X 是否一定是紧的?

对于问题 1,已知 CH 和 MA + ┐ CH 都能给出否定的答案(Gruenhage, Nyikos[1991]). 对于问题 2,若承认 MA + ┐ CH,则答案是肯定的．因为由 Katetov 定理,X 是全正规的,而 Weiss 的定理表明 X 必是紧的．另一方面,Beslagic[1994a]通过精致地构造技巧,证明了◇⇒存在可数紧而非紧的空间 X,使 X^2 是遗传正规的．从而证明了问题 2 的答案独立于 ZFC.

3. Starbird 曾经问过,是否有可能存在两个不一定是 Dowker 空间的空间 X 和 Y,而其乘积 $X \times Y$ 是一个 Dowker 空间? 对这个问题,Beslagic 曾宣布过由 CH 或◇* 均可作出这样的例子(Beslagic[1985],[1990],Wage[1978]). Beslagic[1994b]利用◇成功地构造出一个全正规空间 X,使得 X^2 是正规和非可数仿紧的．

4. 关于◇的应用还可以参考下列文献: Ivanov[1978]; Malyhin[1979],[1990]; Hanazawa[1980],[1983]; 戴牧民,刘川[1995].

在 Ivanov[1978]中,他利用了 Fedorcuk 原理(与◇是等价的)证明了,存在全正规,局部紧,可数紧,非紧的空间 X,使得对每个自然数 n, X^n 是遗传可分的．

Malyhin[1979]证明了,◇⇒存在遗传可分的紧 Frechet 空间 X,它有一个点不是 $\pi(c)$点．Malyhin[1990]用◇作出了一个 Ostaszewski 型的非序列的紧空间．

Hanazawa[1980]给出了 Rajagopalan 关于♣的各种变式彼此等价的证明．在[1983]的论文中,他用◇构造了一个不是可数亚紧的 Aronszajn 树(1980 年,Fleissner 用 **V = L** 作出过这样的树).

X 称为 D_1 空间,如果 X 的每个闭子集都有可数的局部基．Aull 曾经证明,全正规的可数紧空间是 D_1 空间．戴牧民,刘川[1995]证明了,若 X 是 D_1 空间,则 X 的非孤立点的集是可数紧的．D_1 空间有良好的广义度量结构,它是全正规的 M 空间和弱 γ 空间,但 D_1 空间的覆盖性

质强烈地依赖于集论．若承认 MA + ┐CH，则它是遗传强仿紧的，但若承认◇，则 D_1 空间甚至可以不是等紧（isocompact）的（例子是 Ostaszewski线）．

二、◇*，◇+和◇++

在第四章 § 3 中，我们曾指出◇原理可以由可构造性公理 **V** = **L** 推出，这是通过对可构造集类 **L** 的精细结构的研究得到的．由 **L** 的精细结构还可以推出一些类似于◇的集论命题，其中一些已被集论拓扑学者用来解决拓扑学问题，取得了好的效果．

为了方便对比，我们重新叙述一遍◇原理．

◇：存在 ω_1 序列 $\{A_\alpha:\alpha<\omega_1\}$，$\forall\alpha, A_\alpha\subset\alpha$，使得 $\forall A\subset\omega_1$，$\{\alpha:A\cap\alpha=A_\alpha\}$ 是 ω_1 中的平稳集．

下面给出几个类似于◇的集论命题的定义．

◇*：存在 ω_1 序列 $\{\mathscr{A}_\alpha:\alpha<\omega_1\}$，满足

(1) $\forall\alpha, \mathscr{A}_\alpha\subset[\alpha]^{\leqslant\omega}$.

(2) $\forall A\subset\omega_1$，$\{\alpha:A\cap\alpha\in\mathscr{A}_\alpha\}$ 包含有 ω_1 中一个 Cub.

◇+：存在 ω_1 序列 $\{\mathscr{A}_\alpha:\alpha<\omega_1\}$，满足

(1) $\forall\alpha, \mathscr{A}_\alpha\subset[\alpha]^{\omega}$.

(2) $\forall A\subset\omega_1$，$\exists$ Cub C，使得 $\forall\alpha\in C$，有 $A\cap\alpha\in\mathscr{A}_\alpha$，$C\cap\alpha\in\mathscr{A}_\alpha$.

◇++：存在 ω_1 中一个平稳集 X，使得 $\forall\alpha\in X$，对应有 $\mathscr{A}_\alpha\subset[\alpha]^{\omega}$，满足

(1) $\forall A\subset\omega_1$，$\{\alpha:A\cap\alpha\in\mathscr{A}_\alpha\}$ 包含 X 中一个 Cub.

(2) $\forall\alpha\in X$，$\{A\in\mathscr{A}_\alpha:A$ 是 α 中的 Cub$\}$ 构成一个 filter.

注：上述命题都是就 ω_1 而言的，它们都可以推广到就任意的正则基数 κ 和 κ 中一个平稳集 E 而言的情形．例如

◇(κ,E)：$\forall\alpha\in E$，$\exists A_\alpha\subset\alpha$，使得 $\forall A\subset\kappa$，$\{\alpha:A\cap\alpha=A_\alpha\}$ 是一个平稳集．

而◇正好就是◇(ω_1,ω_1)．类似可以定义◇*(κ,E)，◇+(κ,E)等．可以证明 **V** = **L** $\Rightarrow$ ◇+(κ,E) $\Rightarrow$ ◇*(κ,E) $\Rightarrow$ ◇(κ,E).

下面我们介绍一下它们的应用情况．

1. $\diamondsuit^*$ 的第一个应用是 Shelah[1979]. 他证明了, $\diamondsuit^* \Rightarrow$ 任何一个第一可数的正规空间都是 ω_1CWH 的 .(这是 Fleissner[1974]的工作的精细化 . Fleissner 是用 V = L 证明特征 $\leqslant c$ 的正规空间的 CWH 性 .) 1985 年, Daniels 与 Gruenhage 应用 $\diamondsuit^*$ 并改进了构造 Kunen 线及 Fleissner 用 CH 构造不可度量的正规 Moore 空间的技巧作出了一个全正规, 局部紧, 非族正规但是 CWH 的空间 . Szeptycki[1993]则用 $\diamondsuit^*$ 证明了存在正则第一可数的可数亚紧空间, 其中包含有一个非 G_δ 的闭离散集 .

2. Rudin[1988]利用 $\diamondsuit^+$ 作出了一个全正规的不可度量的 3-维流形 $M = \bigcup\{M_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, 其中的每个 M_α 都是 M 的一个可度量的开连通子空间 . 1990 年, 她又用 $\diamondsuit^+$ 证明了正规而不是族正规流形的存在性 (Rudin[1990]).

3. 利用 $\diamondsuit^{++}$, Rudin[1983b]作出了一个正规, 可遮, 非族正规的空间(由 Nagami 的正规 + 可遮 + 可数仿紧 $\Rightarrow$ 仿紧性的定理, 这个空间当然是个 Dowker 空间). 1985 年, Beslagic 与 Rudin 又利用 $\diamondsuit^{++}$ 构造了一个空间 $\triangle$, 它是强 0 维, 族正规的, 它的每个递增开覆盖都有一个既开又闭的收缩, 但存在一个开覆盖却没有闭收缩 .(设 $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 是空间 X 的一个覆盖, 它的一个收缩(Shrinking)是指一个相同指标的另一个覆盖 $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$, 它满足条件: $\forall \alpha \in A, M_\alpha \subset G_\alpha$.)

Watson 曾提出过一个问题: 正规的、第一可数的 CWH 空间是否相对于由散射集组成的闭离散族是族正规的? Fleissner[1983b]利用 $\diamondsuit^{++}$ 给出了一个否定的回答 . 他证明存在一个第一可数空间 X 和一个以比 LOTSω_1 细的拓扑作为拷贝组成的闭离散族, 使这个集族不能被开集分离 . 但是据 Watson 说, 他花了很大的力气也没搞懂 Fleissner 的证明(见 van Mill, Reed[1990]中 Watson 的文章). 或许是为了回答 Watson 等人的困惑, Fleissner 1993 年为纪念 Rudin 而出版的文集中又重新给出了证明(见 Fleissner[1993]).

三、关于 V = L

在众多的集论命题中, V = L 是一个特别强的公理, 因为它不允许存在不能由 Gödel 演算构造出来的集, 也就是说, 它是所有与 ZFC 相容的集论模型中最小的一个模型 . 前面所提到的诸如 CH, MA, $\diamondsuit$ 等命

题，其叙述中都涉及势的限制，而 $\mathbf{V=L}$ 则并不涉及．这或许也是它强力的一个原因．它的第一个应用恐怕是 Fleissner 的下列经典性结论．

定理 1($\mathbf{V=L}$)　(1) 特征 $\chi(X)\leqslant c$ 的正规空间是 CWH 的．

(2) 局部紧的正规 Moore 空间是可度量的．(Fleissner[1974])

这个定理的证明需要用到由 $\mathbf{V=L}$ 推出的关于平稳系统的◇原理．

称 $\mathscr{A}=\{A_f:f\in{}^{\kappa}\kappa\}$ 是一个关于 κ 的平稳系统，如果每个 A_f 都是 κ 的一个平稳子集，并且当 $\alpha\in\kappa,f,g\in{}^{\kappa}\kappa$，满足 $f\restriction_{\alpha}=g\restriction_{\alpha}$ 时，就有 $A_f\cap(\alpha+1)=A_g\cap(\alpha+1)$．

关于 κ 的平稳系统的◇原理：对 κ 的任何平稳系统 $\mathscr{A}$，存在 κ 序列 $\{f_\alpha:\alpha<\kappa\}$，其中 $f_\alpha\in{}^{\alpha}\alpha$，使得对每个 $f\in{}^{\kappa}\kappa$，存在平稳集 $S\subset A_f$，对任意 $\beta\in S$，有 $f\restriction_{\beta}=f_\beta$．

可以证明：

1．设 κ 是正则基数，X 是正规和 $<\kappa$CWH 的，$\chi(X)\leqslant\kappa$，则由关于 κ 的平稳系统的◇原理可以推出 X 是 κCWH 的．

2．设 $\mathrm{cf}(\kappa)=\omega$，$X$ 是正规和 $<\kappa$CWH 的，则可以推出 X 是 κCWH 的．

3．设 $\omega\leqslant\mathrm{cf}(\kappa)<\kappa$，$X$ 是正规和 $<\kappa$CWH 的，$\chi(X)<\kappa$，并且对每一个满足 $\chi(X)\leqslant\lambda<\kappa$ 的基数 λ，有 $2^{\lambda}=\lambda^{+}$，则 X 是 κCWH 的．

结合上述三种情况的结论对 X 的闭离散集的势进行归纳论证，就可以推出定理 1(1)的结论．详细的讨论可参看 Tall[1984]．

在 Fleissner 定理的基础上，Watson 作了进一步的工作，他证明了：

定理 2($\mathbf{V=L}$)　(1) 局部紧的正规空间是 CWH 的．

(2) 正规的可数型空间是 CWH 的．

(3) 局部紧的正规次亚紧空间是仿紧的．(Watson[1982])

注：X 称为可数型的，如果对 X 的任何紧子集 C 都存在一个紧集 K，K 包含 C 并且 K 有可数外基．显然，局部紧空间都是可数型的．

将前述问题中的正规换为可数仿紧性时，用 $\mathbf{V=L}$ 也得到了如下肯定的结果．

定理 3($\mathbf{V=L}$)　第一可数的可数仿紧空间是 CWH 的．(Watson[1985])

定理 4(V = L) 局部紧,可数仿紧的可遮空间是仿紧的 .(Daniels [1988])

定理 5(V = L) 局部紧,可数仿紧的次亚紧空间是仿紧的 .(Balogh[1988b])

其他类似的结论还有

定理 6(V = L) 第一可数的 ω_1 仿 Lindelöf 空间是 CWH 的 .(Fleissner[1983a])

定理 7(V = L) (1) 第一可数的↗正规空间是 σCWH 的 .

(2) 局部紧的↗正规空间关于由紧集组成的离散族是族正规的 .(Balogh, Burke[1994])

定理 8(V = L) 存在正规,可遮但不是仿紧的空间 .(Rndin [1983a])

此外,还可以参看 Chiba, Przymusinski, Rndin[1986]和滕辉[1990], Chiba 等人在 V = L 下给出了下述 Morita 猜想的肯定回答 .

Morita 猜想:(1) 若对所有的正规 P 空间 Y,乘积 $X \times Y$ 是正规的,则 X 是可度量的 .(2) X 是局部紧和可度量的充要条件是,对任一个正规可数仿紧空间 Y, $X \times Y$ 是正规的 .

定理 9(V = L) Morita 猜想(1)和(2)都成立 .

滕辉则证明了下述结论:

定理 10(V = L) 设 X 是 I^{ω_1} 的开子空间 . 若 X 是正规的,则 X 是仿紧的,从而也是 σ- 紧和 Lindelöf 的 .

参考文献

Alster K.

[1975] Subparacompactness in Cartesian products of generalized ordered topological spaces. Fund. Math. 1975, 87:7 ~ 28

[1992] Some remarks concerning the Lindelöf property of the product of a Lindelöf space with the irrationals. Topo. Appl. 1992, 44:19 ~ 25

Alster K, Burke D K, Davis S.

[1988] The $W\Delta$-space problem. Topo. Appl. 1988, 30: 175 ~ 181

Alster K, Pol R.

[1975] Moore spaces and collectionwise Hausdorff property. Bull. Pol. Acad. Sci. 1975, 23:1189 ~ 1192

Alster K, Przymusinski T.

[1976] Normality and Martin's Axiom. Fund. Math. 1976, 91:123 ~ 131

Alster K, Zenor P.

[1976a] An example concerning the preservation of the Lindelöf property in product spaces. *Set-theoretic Topology*. New York: Academic Press, 1976, 1 ~ 10

[1976b] On the collectionwise normality of generalized manifolds. Topo. Proc. 1976, 1:125 ~ 127

Arhangel'ski A V.

[1980] The star method, new classes of spaces and countable compactness. Soviet Math. Dokl. 1980, 21(2):550 ~ 554

[1992] The general concept of clevability of a topological space. Topo. Appl. 1992, 14:25 ~ 36

Avraham Uri.

[1981] Free sets for nowhere-dense set mappings. Israel J. M. 1981, 39(2):2, 167 ~ 176

Bacon P.

[1970] The compactness of countably compact spaces. Pacific J. M. 1970, 32:587 ~ 592

Balogh Z.

[1981] On the metrizability of F_{pp} spaces and its relationship to the normal Moore space conjecture. Fund. Math. 1981, 113(1):45 ~ 48

[1983] Locally nice spaces under Martin's axiom. Comment Math. Carolin 1983, 24:63 ~ 67

[1984] On hereditarilly strong $\sum$-spaces. Topo. Appl. 1984, 17:199 ~ 215

[1985] Topological spaces with point-networks. Proc. AMS, 1985, 94: 497 ~ 501

[1986a] Paracompactness in locally Lindelöf spaces. Canad. J. M. 1986, 38:719 ~ 727

[1986b] Paracompactness in normal, locally connected, rim-compact spaces. Topo. Appl. 1986, 22(1):1 ~ 6

[1987] $W\Delta$-doubles of separable metric spaces. Handwriten manuscript.

[1988a] On two problems concerning Baire sets in normal spaces. Proc. AMS, 1988, 103:939 ~ 945

[1988b] Locally compact, countably paracompact spaces in the constructible universe. Topo. Appl. 1988, 30:19 ~ 26

[1989] On compact Hausdorff spaces of countable tightness. Proc. AMS, 1989, 105:755 ~ 764

[1991] On collectionwise normality of locally compact normal spaces. Trans. AMS, 1991, 323:389 ~ 411

Balogh Z, Bennett H.

[1987] Total paracompactness of real GO-spaces. Proc. AMS, 1987, 101:753 ~ 760

Balogh Z, Burke D K.

[1992] A total ladder system space by CCC forcing. Topo. Appl. 1992, 44:37 ~ 44

[1994] On ↑ normal spaces. Topo. Appl. 1994, 57:71 ~ 85

Balogh Z, Dow A, Fremlin D H, Nyikos P.

[1988] Countable tightness and proper forcing. Bull. AMS, 1988, 19: 259 ~ 270

Baturov D P.

[1994] On hereditarily normal compact spaces in which regular closed subsets are G_δ-sets. Topo. Appl. 1994, 58:151 ~ 155

Baumgartner J E, Malitz J I, Reinhardt W.

[1970] Embeding trees in rationals. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 1970, 67:1748 ~ 1753

Baumgartner J E, Weese M.

[1982] Partion algebras for almost-disjoint families. Trans. AMS, 1982, 274:619 ~ 630

Beaudoin Robert E.

[1994] An application of ultraproducts to Stone-Cech compactifications. Houston J. Math. 1994, 20:547 ~ 554

Bell M.

[1980] Compact ccc nonseparable spaces of small weight. Topo. Proc. 1980, 5:11 ~ 25

[1981] On the combinatorial principle $P(c)$. Fund. Math. 1981, 114: 149 ~ 157

[1985] First countable pseudocompactifications. Topo. Appl. 1985, 21: 159 ~ 166

Bell M, Ginsburg T.

[1980] First countable Lindelöf extension of uncountable discrete spaces.

Canad. J. M. 1980, 23:397 ~ 399

Bell M, Kunen K.

[1981] On the pi-character of ultrafilters. C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 1982, 3:351 ~ 356

Bennett H, Balogh Z.

[1989] Quasi-developable manifolds. Topo. Proc. 1989, 14(2):201 ~ 212

Berner Andrew J.

[1979] Generalizations of quasi k spaces. Gen. Topo. Appl. 1979, 10(1):1 ~ 6

[1980] βX can be Fréchet. Proc. AMS, 1980, 80:367-373

[1981] Spaces with conditionally compact subsets. Proc. AMS, 1981, 81:137 ~ 142

Beslagic A.

[1985] A Dowker product. Trans. AMS, 1985, 292:519 ~ 530

[1986] Normality in products. Topo.Appl. 1986, 22:71 ~ 82

[1990] Another Dowker product. Topo. Appl. 1990, 36:253 ~ 264

[1994a] A hereditarily normal square. Topo. Appl. 1994, 56:13 ~ 23

[1994b] Yet another Dowker product. Topo. Appl. 1994, 56:35 ~ 43

Beslagic A, Rudin M E.

[1985] Set theoretic constructions of nonshrinking open covers, Topo. Appl. 1985, 20:167 ~ 177

Boehme T K, Rosenfeld M.

[1974] An example of two compact Hausdorff Fréchet whose product is not Fréchet. J. London Math. Soc. (2), 1974, 8:339 ~ 344

Booth D.

[1974] A Boolean view of sequential compactness. Fund. Math. 1974, 85:99 ~ 102

Broverman S, Ginsburg J, Kunen K, Tall F D.

[1978] Topologies determined by σ-ideals on ω_1. Canad. J. M. 1978,

30:1306 ~ 1312

Broverman S, Weiss W.

[1981] Spaces co-absolute with βN-N. Topo. Appl. 1981, 12:127 ~ 133

Burke D K.

[1984a] Covering Properties. *Handbook of Set-theoretic Topology*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984, 347 ~ 422

[1984b] PMEA and first countable, countably paracompact spaces. Proc. AMS, 1984, 92:455 ~ 460

[1992] Closed discrete subsets in first countable, countably metacompact spaces. Topo. Appl. 1992, 44:63 ~ 67

Burke D K, Davis S W.

[1981] Compactification of symetrizable spaces. Proc. AMS, 1981, 81: 647 ~ 651

[1982] Pseudocompact paralindelöf spaces are compact. Abstracts AMS, 3:213

[1984] Subsets of ${}^{\omega}\omega$ and generalized metric spaces. Pacific J. M. 1984, 115:273 ~ 281

Carlson T.

[1984] On extending Lebesgue measure by infinitely many sets. Pacific J. M, 1984, 115:33 ~ 45

de Caux P.

[1976] A collectionwise normal, weakly θ-refinable Dowker space which is neither irreducible nor realcompact. Topo. Proc. 1976, 1:66 ~ 77

Chaber J.

[1976] Conditions which imply compactness in countably compact spaces. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1976, 24:993 ~ 998

Chen Haiyan(陈海燕), Dai Mumin(戴牧民).

[1995] Spaces with feebly compactness. Q&A in Gen. Topo. 1995, 13:

123 ~ 128

Chen Huaipeng(陈怀鹏).

[1995] An answer to a conjecture on the countable products of k-spaces. Proc. AMS, 1995, 123:583 ~ 587

Chiba K, Przymusinski T C, Rudin M E.

[1986] Normality of product spaces and Morita's conjectures. Topo. Appl. 1986, 22:19 ~ 32

Chigogidze A C.

[1979] Perfect normality and Martin's axiom. Akad. Nauk. Gruzin SSR 1979, 95(2):273 ~ 276

[1981] The density of space X is equal to pseudocharacter of $C(X)$. Soobsch. Akad. Nauk. Gruzin SSR. 1981, 103(1):29 ~ 32

Ciesielski K.

[1987] Martin's Axiom and a regular topological space with uncountable network whose countable product is hereditarily separable and hereditarily Lindelöf. J. Symb. Logic, 1987, 52:396 ~ 399

Cohen P E.

[1966] *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. New York: Benjamin, 1966

[1976] Products of Baire spaces. Proc. AMS 1976, 55:119 ~ 124

Comfort W W, Negrepontis S.

[1982] *Chain Conditions in Topology*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982

Cook H.

[19??] A separable normal Moore space whose square is not normal.

Cook H, Reed G M.

[1999] On the non-productivity of normality in Moore spaces. Proc. AMS, 1999, 127:875 ~ 880

Dai Mumin(戴牧民).

[1986] 涉及 Calibre 和 * Lindelöf 性的几个反例. 数学学报, 1986,

29(6):366 ~ 402

[1989] Some consistent results on * Lindelöfness and Calibre. 数学年刊 B辑, 1989, 10B4:458 ~ 461

Dai Mumin(戴牧民), Liu Chuan(刘川).

[1992] Spaces in which Lindelöf closed sets have countable local bases. Q&A in Gen.Topo. 1992, 10:1 ~ 7

[1994] k-spaces and products of spaces with σ-hereditarily closure preserving k-networks. 东北数学, 1994, 10:267 ~ 272

[1995] D_1 spaces and their metrization. 东北数学, 1995, 11:215 ~ 220

[1998] Pseudocompact, locally compact, first countable CCC spaces may be or may not be * Lindelöf. 东北数学, 1998, 13(1):81 ~ 83

Dai Mumin(戴牧民), Zhou Haoxuan(周浩旋).

[1993] A machine producing non- * Lindelöf spaces. 数学年刊 B 辑, 1993 14B2:197 ~ 200

Daniels P.

[1983] Normal, locally compact, boundedly metacompact spaces are paracompact: an application of Pixley-Roy spaces. Canad. J. M. 1983, 35:827 ~ 833

[1988a] A first countable, weakly ω_1-CWH, not weakly ω_2-CWH space. Q&A in Gen.Top. 1988, 6:129 ~ 134

[1988b] On collectionwise Hausdorffness in countably paracompact, locally compact spaces. Topo.Appl. 1988, 28:113 ~ 125

Daniels P, Gruenhage G.

[1985] A perfectly normal, locally compact, non-collectionwise normal space uner $\diamondsuit^*$. Proc. AMS, 1985, 95:115 ~ 118

Davis P.

[1979] Non-perfect spaces with point-countable bases. Proc. AMS, 1979, 77:276 ~ 278

Davis S W.

[1979] A cushion-type weak covering properties. Picific J.M. 1979, 80:

359 ~ 380

Davis S W, Reed G M, Wage M L.

[1976] Further results on weakly uniform bases. Houston J.M. 1976, 2: 57 ~ 63

Devlin K J, Shelah S.

[1978] A weak version of ◇ which follows from $2^{\omega} < 2^{\omega}$. Israel J. M. 1978, 29:239 ~ 247

[1979] A note on normal Moore space conjecture. Canad. J. M. 1979, 3:245 ~ 251.

Dodd A, Jensen R.

[1981] The core model. Ann. Math. Logic, 1981, 20:43 ~ 75

van Douwen E K.

[1977] The Pixley-Roy topology on spaces of subsets. *Set-theoretic Topology*, New York: Acad. Press, 1976, 111 ~ 134

[1979] A basically disconnected normal space Φ with $|\beta\Phi - \Phi| = 1$. Canad. J. M. 1979, 31:911 ~ 914

[1980] Jone's lemma and inaccessible cardinal. *General Topology and Modern Analysis* (Proc. Conf. Univ. California, 1980), 399 ~ 403

[1992] A techenique for constructing honest locally compact submetrizable examples. Topo. Appl. 1992, 47:179 ~ 201

van Douwen E K, Kunen K.

[1982] L-spaces and S-spaces in $P(\omega)$. Topo. Appl. 1982, 14:143 ~ 149

van Douwen E K, Lutzer D, Pelant J, Reed G M.

[1980] On unions of metric spaces. Canad. J. M. 1980, 30:76 ~ 85

van Douwen E K, van Mill Jan

[1978] Parovicenko's characterization of $\beta\omega - \omega$ implies CH. Proc. AMS, 1998, 72:539 ~ 541

van Douwen E K, Przymusinski T.

[1979] First countable and countable spaces all compactifications of which

contain βN. Fund. Math. 1979, 102:229 ~ 234

[1980] Separable extension of first countable spaces. Fund. Math. 1979 ~ 1980, 105(2):147 ~ 158

van Douwen E K, Reed G M.

[1991] On chain condition in Moore spaces, Ⅱ. Topo. Appl. 1991, 39:65 ~ 69

van Douwen E K, Reed G M, Roscoe A W, Tree I J.

[1991] Star covering properties. Topo. Appl. 1991, 39:71 ~ 103

van Douwen E K, Tall F D, Weiss W W.

[1977] Non-metrizable hereditarily Lindelöf spaces with point-countable bases from CH. Proc. AMS, 1977, 64:139 ~ 145

van Douwen E K, Wage M L.

[1979] Small subsets of first countable spaces. Fund. Math. 1979, 103:103 ~ 110

Dow A.

[1982a] Some separable spaces and remote points. Canad. J.M. 1982, 34:1378 ~ 1389

[1982b] Weak P-points in compact ccc F-spaces. Trans. AMS, 1982, 269(2):557 ~ 565

[1983] CH and open subspaces of F-spaces. Proc. AMS, 1983, 89:341 ~ 345

[1988a] PFA and ω_1^*. Topo. Appl. 1988, 28:127 ~ 140

[1988b] An empty class of nonmetric spaces. Proc. AMS, 1989, 104:997 ~ 1001

[1989] A separable space with no remote points. Trans. AMS, 1989, 312:335 ~ 353

[1992] On the consistency of the Moore-Mrowka solution. Topo. Appl. 1992, 44:125 ~ 141

[1995] More set theory for topologists. Topo. Appl. 1995, 64:243 ~ 300

Dow A, Hart K P.

[1995] Cut points in Cech-Stone remainders. Proc. AMS, 1995, 123: 909 ~ 917

Dow A, van Mill J.

[1982] An extremely disconnected Dowker space. Proc. AMS, 1982, 86:669 ~ 672

Dow A, Tall F D, Weiss W.

[1990] New proofs of the Moore space conjecture. Topo. Appl. 1990, 37:33 ~ 35

Dowker C H.

[1951] On countably paracompact spaces. Canad. J.M. 1951, 7:219 ~ 224

Efimov B A, Certanov G I.

[1978] Two properties of the Suslin continuum. Math. Balgania, 1976, 6:47 ~ 54

Engelking R.

[1977] *General Topology*. Warszawa, Polish Scientific Publishers, 1977

Fedorcuk V V.

[1976] Fully closed mappings and the compatibility of some theorems of general topology with the axioms of set theory. Mat. Sb. 1976, 99:3 ~ 33

[1977] A compact space having the cardinality of the continuum with no convergent sequences. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 1977, 81:177 ~ 181

[1978] Ordered sets. ДАН 1978, 240:280 ~ 282

[1993] A differential manifold with noconsiding dimensions. Topo. Appl. 1993, 54:221 ~ 239

Filippov V V.

[1969] On perfectly normal bicompacta. Dokl. Akad. Nauk. USSR, 1969, 189:736 ~ 739

Foged L.

[1986] Normality in k-and-Aleph spaces. Topo. Appl. 1986, 22:223 ~ 240

Fleissner W G.

[1974] Normal Moore spaces in the constructible universe. Proc. AMS, 1974, 46:294 ~ 298

[1975] When is Jone's space normal? Proc. AMS, 1975, 50:375 ~ 378

[1977] The character of ω_1 in first countable spaces. Proc. AMS, 1977, 62:149 ~ 155

[1978a] Separation properties in Moore spaces. fund. Math. 1978, 98(3):279 ~ 286

[1978b] Current research on Q-sets. Topology (Proc. 4-th Colloq. Budapest), 1978, 413 ~ 431

[1980a] A CWH nonnormal Moore space with a σ-locally countable base. Topo. Proc. 1979, 4:83 ~ 97

[1980b] Applications of stationary sets in topology. *Surveys in General Topology*, 163 ~ 193(Press New York 1980)

[1980c] Remarks on Souslin properties and tree topologies. Proc. AMS, 1980, 80:320 ~ 326

[1980d] Martin's axiom implies that Caux's space is countably metacompact. Proc. AMS, 1980, 80:495 ~ 498

[1982] If all normal Moore spaces are metrizable, then there is an inner model with a measurable cardinal. Trans. AMS, 1982, 273:365 ~ 373

[1983a] Discrete sets of singular cardinality. Proc. AMS, 1983, 88:743 ~ 745

[1983b] Son of George and $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, J. Symbolic Logic, 1983, 47:71 ~ 77

[1984] Normal Moore Spaces And Large Cardinals. *Handbook of Set-theoretic Topology*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984, 733 ~ 760

[1985] Burke's theorm from the product category extension axiom. Topo. Proc. 1985, 10:55 ~ 57

[1991] Normal Measure Axiom and Balogh's Theorems. Topo. Appl. 1991, 39:123 ~ 143

[1993] Theorems from measure axioms, counterexamples from $\diamondsuit^{++}$. The work of Mary Rudin(Madison,W1,1991), New York:1993, 67 ~ 77

Fleissner W G, Hansell R W, Junnila J K.

[1982] PMEA implies proposition P. Topo. Appl. 1982, 13(3):255 ~ 262

Fleissner W G, Miller A M.

[1980] On Q-sets. Proc. AMS, 1980, 78:280 ~ 284

Fleisnner W G, Reed G M.

[1977] Paralindelöf spaces and spaces with a σ-locally countable base. Topo. Proc. 1977, 2(1):89 ~ 110

Franklin S P.

[1969] On two questions of Moore and Mrowka. Proc. AMS, 1969, 21: 591 ~ 599

Franklin S P, Rajagopalan M.

[1970] Some examples in topology. Trans. AMS, 1970, 155:305 ~ 314

Fremlin D H.

[1984] *Consequences of Martin's Axiom*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1984

[1988] Perfect preimages of ω_1 and PFA. Topo. Appl. 1988, 29:157 ~ 166

Fremlin D H, Nyikos P.

[19??] Countably tight, countably compact spaces.

Galvin F.

[1981] Chain conditions and products, Fund. Math. 1981, 108:33 ~ 48

Gao Guoshi(高国士).

[2000] 拓扑空间论.北京:科技出版社,2000

Gao Zhimin(高智民).

[1987] The closed images of metric spaces and Fréchet Aleph spaces. Q&A in Gen. Topo. 1987, 5:281~291

Garder R J, Pfeffer W F.

[1980] Some undecidability results concerning Radon measure. Trans. AMS, 1980, 219:65~74

Gauld D.

[1993] A strongly hereditarily separable, nonmetrizable manifold. Topo. Appl. 1993, 51:221~228

Gillman L, Jerison M.

[1960] *Rings of Continuous Functions*. Amsterdam: Van Nostrand Press, 1960

Ginsburg J.

[1977a] S-spaces in countably compact spaces using Ostaszewski's method. Pacific J.M. 1977, 68:393~397

[1977b] A topological version of ◇, Proc. AMS, 1977, 65:142~150

Ginsburg J, Saks V.

[1975] Some applications of ultrafilters in topology. Pacific J.M. 1975, 57:403~418

Gruenhage G.

[1978] A note on product of Fréchet spaces. Topo.Proc. 1978, 3:109~115

[1980a] Paracompactness and subparacompactness in perfectly normal locally compact spaces. УМН 1980, 65(3):44~49

[1980b] k-spaces and products of closed images of metric spaces. Proc. AMS, 1980, 80:478~482

[1984a] Generalized Metric Spaces. *Handbook of Set-theoretic Topology*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984, 423~502

[1984b] Two normal locally compact spaces under Martin's axiom. Topo.

Appl. 1984, 9:297 ~ 306

[1988] On the existence of metrizable or Sorgenfrey subspaces, Proc. of the sixth Prague Topolgy Symposium, Prague: Helderman Verag, 1988, 223 ~ 230

[1989] Cosmicity of cometrizable spaces. Trans. AMS, 1989, 313:301 ~ 315

[1994] Spaces in which the nondegeneta to conneted sets are cofinite. Proc. AMS, 1994, 122:911 ~ 924

Gruenhage G, Gardener R J.

[1978] Completeness and weak covering properties and measure compactness. J. London Math. Soc. (Ser.)(2), 1978, 18(2):316 ~ 324

Gruenhage G, Nogura T, Purisch S.

[1991] Normality of $X \times \omega_1$, Top. Appl. 1991, 39:263 ~ 275

Gruenhage G, Nyikos P.

[1991] Normality in X^2 for compact X. Preprint

Hajnal A, Juhasz I.

[1972] Two consistency results in topology, Bull. AMS, 1972, 78:711

[1973] A consistency result concerning hereditarily α-separable spaces, Indag. Math. 1973, 35:301 ~ 307

[1974] On heriditarily α-Lindelöf and α-separable spaces. Fund. Math. 1974, 8:147 ~ 158

[1982] When is a Pixley-Roy hyperspace ccc? Topo. Appl. 1982, 13:33 ~ 41

Hanazawa Masazumi.

[1980] Two remarks on certain variants of "club". Sci. Rep. Saitama Univ. Ser. A 1980, 9:57 ~ 60

[1983] Countable metacompactness and tree topologies. J. Math. Soc. Japan 1983, 35(1):59 ~ 70

Hart K P.

[1981] Strong collectionwise normality and M.E.Rudin's Dowker space. Proc. AMS, 1981, 83:802 ~ 806

[1982] More on M.E.Rudin's Dowker space. Proc. AMS, 1982, 86: 508 ~ 510

[1983] More remarks on Suslin properties and tree topologies. Topo. Appl. 1983, 15(2):151 ~ 158

Heath R W.

[1964] Screenability, pointwise paracompactness and metrization of Moore spaces. Canad. J. M. 1964, 16:763 ~ 770

Hechler S H.

[1975] On some weakly compact spaces and their products. Gen. Topo. Appl. 1975, 5:83 ~ 93

Helson H.

[1948] Remark on measure in almost independent fields. Studia Math. 1948, 10:182 ~ 183

Hodel, R.

[1984] Cardinal Functions I. *Handbook of Set-theoretic Topology*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984, 1 ~ 61

Horn A, Tarski A.

[1948] Measure in Boolean algebras. Trans. AMS, 1948, 64:467 ~ 497

Husek M.

[1977] Topological spaces without accessible diagonal. Comment. Math. Univ. Carolin. 1977, 18:777 ~ 788

Ivanov A V.

[1978] The hereditary separability and dimension of products of bicompacta. ДАН 1978, No.5, 1037 ~ 1040

Jacovlev N.

[1976] On the theory of O-metrizable spaces, Dokl, Akad. Nauk. 1976, 229:1330 ~ 1331

Jech T.

[1967] Nonprovablility of Soulin's hypothesis, Comment Math. Univ. Carolinae, 1967, 8:291 ~ 305

Jensen R B.

[1972] The fine structure of the constructible universe. Ann. Math. Logic 1972, 4:229 ~ 308

Jiang Jiguang(蒋继光).

[1991] 一般拓扑学专题选讲 . 成都:四川教育出版社,1991

Jiang Shouli(江守礼)

[1986] Every strictly p-space is θ-refinable, Topo. Proc. 1986, 11:309 ~ 316

Jones F B.

[1937] Concerning normal and completely normal spaces. Bull. AMS, 1937, 43:671 ~ 677

[1965] Remarks on the normal Moore space metrization problem. Topology Seminar Wisconsin, Ann. of Math. Studies 60, 1965.

Juhasz I.

[1975] *Cardinal Functions in Topology*. Amsterdam: Mathematisch centrum, 1975

[1977] Consistency results in topology. *Handbook of Mathematical Logic*, Ed. by Barwise, Amsterdam: North Holland Press, 1977

[1980] *Cardinal Functions in Topology*-Ten Years Later. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1980

Juhasz I, Kunen K, Rudin M E.

[1976] Two more heriditarily separable non-Lindelöf spaces. Canad. J. M. 1976, 28:998 ~ 1005

Juhasz I, Nagy Zs, Weiss W.

[1979] On countably compact, locally countable spaces. Periodica Math. Hungary, 1979, 10:193 ~ 206

Juhasz I, Szentmiklosy Z.

[1992] On convergent free sequences in compact spaces. Proc. AMS,

1992, 116(1):1153 ~ 1160

Juhasz I, Soukup L, Szentmiklosy Z.

[1994] What makes a space have large weight? Topo. Appl. 1994, 57: 271 ~ 285

Juhasz I, Weiss W.

[1978a] Martin's axiom and normality. Gen. Topo. Appl. 1978, 9:263 ~ 274

[1978b] On a problem of Sikorski. Fund. Math. 1978, 100(3):223 ~ 227

[1979] On thin-tall scattered spaces. Colloq. Math. 1979, 40(1):63 ~ 68

Junnila H J K.

[1979] On countability of pointfinite families of sets. Canad. J. M. 1979, 31:673 ~ 679

[1983] Some topological consequences of the product measure extension axiom. Fund. Math. 1983, 115(1):1 ~ 8

Junnila H J K, Yun Ziqiu(恽自求).

[1992] ℵ-spaces and spaces with a σ-hereditarily closure-preserving k-network. Topo. Appl. 1992, 44:209 ~ 215

Kannan V.

[1980] Every compact T_2 sequential space is Frechet. Fund. Math. 1980, 107:85 ~ 90

Kemoto N.

[1981] A charaterization of the exsistence of a Suslin line. Bull. Austrial Math. Soc. 1982, 25:425 ~ 431

Kozlowski G, Zenor P L.

[1979] A differentiable perfectly normal nonmetrizable manifoid. Topo. Proc. 1979, 4:453 ~ 461

Krom M R.

[1974] Cartesian products of metric Baire spaces. Proc. AMS, 1974,

42:588 ~ 594

Kulesza J, Levy R.

[1991] Separation in ψ-Spaces. Topo. Appl. 1991, 42:101 ~ 107

Kunen K.

[1972] Ultrafilters and independent sets. Trans. AMS, 1972, 172:299 ~ 306

[1976a] Lusin spaces. Topo. Proc. 1976, 1:191 ~ 199

[1976b] Weak P-points in $\mathbf{N}^*$. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 23, Topology, Budapest: 1976, 741 ~ 749

[1977] Strong S and L spaces under MA. *Set-theoretic Topology*, New York: Academic Press, 1977, 265 ~ 268

[1980] *Set Theory* — An introduction to independence proofs. Amsterdam: North-Holland Press, 1980

[1981] A compact L-Space under CH. Topo. Appl. 1981, 12:283 ~ 287

Kunen K, Tall F D.

[1979] Between Martin's axiom and Suslin's hypothesis. Fund. Math. 1979, 102:173 ~ 181

Kunen K, Vaughan J E. (Ed.)

[1984] *Handbook of Set-theoretic Topology*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984

Kurepa D.

[1935] Ensembles ordonnes et ramifies. Publ. Math. Univ. Belgrade 1935, 4:1 ~ 138

[1950] La condition de Souslin et une propriete carateristique des nombres reels, C.R. Acad.Sci.(Paris), 1950, 231:1113 ~ 1114

[1952] Sur une propriete carateristique du continue lineaire et le probleme de Souslin, Acad. Cerbe. Sci. Publ. Inst. Math. 1952, 4:97 ~ 108

Lane D J.

[1980] Paracompactness in perfect normal, locally connected, locally

compact spaces. Proc. AMS, 1980, 80:693 ~ 696

Lawrence L B.

[1990] The influence of a small cardinal on the product of a Lindelöf space and the irrationals. Proc. AMS, 1990, 110:535 ~ 542

Levine N.

[1976] On compactness and sequential compactness. Proc. AMS, 1976, 54:401 ~ 402

Levy R.

[1973] A totally ordered Baire space for which Blumberg's theorem fails. Proc. AMS, 1973, 41:304

[1974] Strongly non-Blumberg spaces. Gen. Topo. Appl. 1974, 4:173 ~ 177

[1980] Pseudocompactness and extension of function in Franklin-Rajagopalan spaces. Topo. Appl. 1980, 11(3):297 ~ 303

Lin Shou(林寿).

[1988] A study of pseudobases, Q & A in Gen. Top. 1988, 6:81 ~ 97

[1995] 广义度量空间与映射. 北京:科学出版社,1995

Lin Shou(林寿), Liu Chuan(刘川).

[1996] On spaces with point-countable *cs*-networks. Topo. Appl. 1996, 74:51 ~ 60

Liu Chuan(刘川).

[1993] Spaces with a σ-hereditarily closure-preserving k-network. Topo. Proc. 1993, 18:1 ~ 10

Liu Chuan(刘川), Dai Mumin(戴牧民).

[1997] CW-复形与阿列夫空间. 数学杂志, 1997, 17(4):533 ~ 536

Liu Chuan(刘川), Lin Shou(林寿).

[1997] k-Space properties of product spaces. 数学学报(外文版), 1997, 13(4):537 ~ 544

Liu Chuan(刘川), Tanaka Y.

[1996a] Spaces with a star-countable k-network and related results.

Topo. Appl. 1996, 74:25 ~ 38

[1996b] Spaces having σ-compact-finite k-networks, and related matters. Topo. Proc. 1996, 21:173 ~ 200

[1998c] Star-countable k-networks, compact-countable k-networks, and related results. Houston Jour. Math. 1988, 24:655 ~ 670

Liu Yingming(刘应明).

[1977] 一类包含弱仿紧空间和次仿紧空间的拓扑空间．数学学报, 1997, 20:212 ~ 214

[1978] CW-复形可乘的一个充要条件．数学学报, 1978, 21:171 ~ 175

Lusin N.

[1914] Sur un probleme de M.Baire, C.R. Acad.(Paris), 1914, 158: 1258 ~ 1261

Lutzer D.

[1978] Pixley-Roy Topology. Topo. Proc. 1978, 3:139 ~ 158

Malyhin V I.

[1976] Sequential and Fréchet-Urysohn bicompacta. Vestnik Moskov Univ. ser.I 1976, 31(5):42 ~ 48

[1979a] Frechet-Urysohn bicompacta: π-point and Stone-Cech extension. Sibirsk Mat. Z. 1979, 20:424 ~ 427

[1979b] Martin's axiom is equivalent to a purely topological statement. Bull. Acad. Polon. Sci.Ser.Math. 1979, 25:895 ~ 900

[1981] Noether spaces. Seminar on General Topology, 51-59. Moskov: Moskov. Gos. Univ. 1981

[1982] Cardinality of compacta with the weak first countability axiom. Mat. Zametki 1982, 32(2):261 ~ 268

[1983] Narrow spaces. Topological Spaces and their Mappings 70-76. Riga: Latv. Gos. Univ. 1983

[1987] $\beta\omega$ under negation of CH. Interim Report of the Prague Topological Symp.2, 1987

[1990] The sequentiallity and the Fréchet-Urysohn property with repect to utrafilters. Acta Univ. Carolin Math. Phys. 1990, 31(2):65 ~ 69

[1994] Topological spaces with properties undetermined in ZFC. Topo. Appl. 1994, 57:209 ~ 214

Malyhin V, Sarpirowski B.

[1973] Martin's axiom and its relation to topological spaces. Dokl. Akad. USSR 1973, 213:532 ~ 535

Martin D A, Solovay R M.

[1970] Iterated Cohen extensions. Ann. of Math. Logic 1970, 2:143 ~ 178

Meyer J I, Simon B R, Wilson R G.

[1981] On the tightness in chain net spaces. Comment Math. Univ. Carolin 1981, 22(4):809 ~ 817

Michael E A.

[1971] Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable Cartesian products. Compositio Math. 1971, 23:199 ~ 214

Mill J van.

[1980] When $U(\kappa)$ can be mapped onto $U(\omega)$? Proc. AMS, 1980, 80:701 ~ 702

[1982] Weak P-points in Cech-Stone compactifications. Trans. AMS, 1982, 273:657 ~ 678

[1984] An introduction to $\beta\omega$. *Handbook of Set-theoretic Topology*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984, 503 ~ 567

Mill J van, Reed G M.

[1990] *Open Problems in Topology*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990

Mill J van, Scott W.

[1983] A compact F-space not co-absolute with βN-N. Topo. Appl. 1983, 15:59 ~ 64

Mill J van, Vermer V.

[1979] Wallman compactification and CH. *Topological Structure* II Part 1, Amsterdam: Math. Centre Tracts, 115, Math. 1979, 181 ~ 185

Navy C.

[1981] A paralindelöf space which is not paracompact. PhD. thesis, Univ. of Wisconsin, Madison

[19??] Para-Lindelöf versus paracompact. Preprint

Negrepontis, S.

[1984] Banach Spaces And Topology, *Handbook of Set-theoretic Topology*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984, 1045 ~ 1142

Nogura I.

[1979] The subsequentiality of product spaces. J. M. Soc. Japan 1979, 31:391 ~ 398

[1985] The product of $\langle\alpha_i\rangle$-spaces. Topo. Appl. 1985, 21:251-259

Nyikos P J.

[1977] A compact non-metrizable space P such that P^2 is completely normal. Topo. Proc. 1977, 2:359 ~ 364

[1978] The normal Moore space problem. Topo. Proc. 1978, 3(2):473 ~ 492

[1980] A provinsional solution to the normal Moore space problem. Proc. AMS, 1980, 78:429 ~ 435

[1988] The complete tunnel axiom. Topo. Appl. 1988, 29:1 ~ 18

Nyikos P J, Vaughan J E.

[1983] On first countable, countably compact spaces I: (ω_1, ω_1^*) gaps Trans. AMS, 1983, 279:463 ~ 469

[1987] Sequentially compact, Franklin-Rajagopalan spaces. Proc. AMS, 1987, 101:149 ~ 155

[1992] Subsets of ${}^\omega\omega$ and the Fréchet-Uryson and α_i-properties. Topo. Appl. 1992, 47:91 ~ 116

Ostaszewski A J.

[1976] On countably compact perfectly normal spaces. J. London Math. Soc. Ser. (2) 1976, 14:505 ~ 516

Oxtoby J C.

[1961] Cartesian products of Baire spaces. Fund. Math. 1960 ~ 1961, 49:157 ~ 166

[1971] *Measure and Category*. New York:Springer-Verlag, 1971

Palenz D.

[1982] Monotonically normality and paracompactness. Topo. Appl. 1982, 14:171 ~ 182

Parovicenko I I.

[1963] On a universal bicompactum of weight ω_1. Soviet Math. Dokl. 1963, 4:592 ~ 595

Pixley C, Roy P.

[1969] Uncompletable Moore spaces. Auburn: Proc. Auburn Univ. Topo. Conf. 1969, 75 ~ 85

Przymusinski T C.

[1973] A Lindelöf space X such that X^2 is normal but not paracompact. Fund. Math. 1973, 78:291 ~ 296

[1977] Normality and separability of Moore spaces. SET-THEORETIC TOPOLOGY. New York:Acad. Press. 1997, 325 ~ 337

[1978a] On the equivalence of certain set theoretic and topological conditions, Proc. Bolyai Janos Colloq. On Topology, Budapest(1978)

[1978b] On the notion of n-cardinality, Proc. AMS, 1978, 69:333 ~ 338

[1980a] Normality and paracompactness in finite and countable Cartesian products. Fund. Math. 1980, 105:87 ~ 104

[1980b] Products of perfectly normal spaces. Fund. Math. 1980, 108 (2):129 ~ 136

[1980c] The exsistence of Q-sets is equivalent to the existence of strong

Q-sets, Proc. AMS, 1980, 79:626 ~ 628

[1982] On Martin's axiom and perfect spaces. Colloq. Math. 1981, 44 (2):20 ~ 215

Przymusinski T C, Tall F D.

[1974] The undecidability of the existence of a normal non-separable Moore space satisfying the coutable chain condition. Fund. Math. 1974, 85:291 ~ 297

Purish S.

[1994] Hereditarily Lindelöf products and Lusin sets. Topo. Appl. 1994, 55:127 ~ 130

Rajagopalan M.

[1979] Compact C-spaces and S-spaces. *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra* Ⅳ Part A, 179 ~ 189

[1976] Some outstanding problems in topology and the V-process. *Categorical Topology*, Lecture Notes in Maths. 540 Berlin: Springer-Verlag, 1976, 501 ~ 507

Rajagopalan M, Woods R G.

[1977] Products of sequentially compact spaces and V-process, Trans. AMS, 1977, 232:245 ~ 253

Reed G M.

[1974a] On chain condition in Moore spaces. Gen. Topo. Appl. 1974, 4:255 ~ 267

[1974b] On continuous images of Moore spaces. Canad. J. M. 1974, 26:1475 ~ 1479

[1974c] On the productivity of normality in Moore spaces, *Studies in Topology*, New York: Acad. Press, 1974, 479 ~ 489

[1980a] On normality and countably paracompactness. Fund. Math. 1980, 110(2):145 ~ 152

[1980b] The intersection topology w.r.t. the real line and the countable ordinals. Amer. Math. Trans. Ser.2, 1980, 509 ~ 520

[1983] Collectionwise Hausdorff versus collectionwise normal with repect to compact sets. Topo. Appl. 1983, 16:259 ~ 272

Reed G M, McIntyre D W.

[1992] A Moore space with caliber(ω_1, ω) but without caliber ω_1. Topo. Appl. 1992, 44:325 ~ 329

Roitman, J.

[1978] A reformuration of S and L. Proc. AMS, 1978, 69:344 ~ 348

[1980a] Partioning spaces which are both right and left separated. Topo. Proc. 1979, 4(2):541 ~ 551

[1980b] Easy S and L groups. Proc. AMS, 1980, 78(2):424 ~ 428

[1984] Basic S And L. *Handbook of Set-theoretic Topology*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984, 295 ~ 326

[1994] A space homeomorphic to each uncountable closed subspace under CH. Topo. Appl. 1994, 55:273 ~ 287

Rosen N I.

[1982] Weakly Ramsey P-points. Trans. AMS, 1982, 269:415 ~ 427

Rothberger F.

[1938] Eine aquivalenz zwischen der Kontinuumhypothese und der Existenz der Lusinsche und Sierepinskischen Mengen. Fund. Math. 1938, 30:215 ~ 217

[1948] On some problem of Hausdorff and Sierpinski. Fund. Math. 1948, 35:29 ~ 46

Rudin M E.

[1955] Countably compactness and Souslin's problem. Canad. J. M. 1955, 7:543 ~ 547

[1965] A technique for constructing examples. Proc. AMS, 1965, 16: 1320 ~ 1323

[1971] A normal space X such that $X \times I$ is not normal. Fund. Math. 1971 ~ 1972, 78:179 ~ 186

[1972] A normal hereditarily separable non-Lindelöf space. Illinois J.

M. 1972, 16:621 ~ 626

[1973] A separable Dowker space, Symp. Math. Isti. Naz. di Alta Math. 125 ~ 313

[1974] a nonormal hereditarilly separable space. Illinous J. M. 1974, 18:481 ~ 483

[1975] *Lectures on Set-theoretic Topology*. CBMS Regional Conference series in Mathematics 23, AMS, Providence. 1975

[1977] Martin's Axiom. *Handbook of Mathematical Logic*, Ed. by Barwise, Amsterdam: North Holland Press, 1997, 491 ~ 501

[1979a] Hereditarily normality and Souslin lines. Topo. Appl. 1979, 10:103 ~ 105

[1979b] The undecidability of the existence of a perfectly normal nonmetrizable manifolds. Houston J. M. 1979, 5:249 ~ 252

[1979c] Pixley-Roy and Soulin line, Proc. AMS, 1979, 79:128 ~ 134

[1983a] A normal screenable nonparacompact space. Topo. Appl. 1983, 15:313 ~ 322

[1983b] Collectionwise normality in screenable spaces. Proc. AMS, 1983, 87:347 ~ 350

[1984] Dowker Spaces. *Handbook of Set-theoretic Topology*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984, 761 ~ 781

[1988] A nonmetrizable manifold from $\diamondsuit^*$. Topo. Appl. 1988, 28:105 ~ 112

[1990] Two nonmetrizable manifolds, Topo. Appl. 1990, 35:137 ~ 152

Rudin M E, Starbird M.

[1977] Some examples of normal Moore spaces. Canad. J. M. 1977, 29: 84 ~ 92

Rudin M E, Zenor P.

[1976] A perfectly normal non-metrizable manifold. Houston J. Math. 1976, 2:129 ~ 134

Sanin N A.

[1948] On the product of topological spaces. Trudy Inst. Steklov 24, Moskow: 1948(俄文)

Sapirovski B.

[1972] On separability and metrizability of spaces with Soulin's condition. Soviet Math. Dokl. 1972, 13:1633 ~ 1638

Scarborough C T, Stone A H.

[1966] Products of nearly compact spaces. Trans. AMS, 1966, 124:131 ~ 147

Scott B M.

[1979] Pseudocompact, metacompact spaces are compact. Topo. Proc. 1979, 4:577 ~ 587

Shelah S.

[1980] Whitehead groups need not be free even assuming CH, II. Israel J. Math. 1980, 35:257 ~ 285

Sierpinski W.

[1924] Sur l'hypothese du continue. Fund. Math. 1924, 5:177 ~ 187

[1934] *Hypothese Du Continu*. Monografje Matematycze, Warszawa-Lwow: 1934

Simon P.

[1980] A compact Fréchet space whose square is not Fréchet. Comment. Math. Univ. Carolin. 1980, 21:749 ~ 753

Siwiec F.

[1974] On defining a space by a weak base. Pacific J. M., 1974, 52: 233 ~ 245

Solovay R M.

[1971] Real valued measurable cardinals, Proc. Symp. in Pure Math. 1981, 3:397 ~ 428

Solovay R M, Tennenbaum S.

[1971] Iterated Cohen extension and Soulin's problem. Ann. of Math. 1971, 94:201 ~ 245

Souslin M.

[1920] Probleme 3, Fund. Math. 1920, 1:233

Steprans J.

[1981] Trees and continuous mapping into the real line. Topo. Appl. 1981, 12(2):181 ~ 185

[1985] Strong Q-sequences and variations of Martin's axiom, Canad. J. M. 1985, 37:730 ~ 746

Steprans J, Zhou Haoxuan(周浩旋).

[1988] Some results on CDH spaces I. Topo. Appl. 1988, 28:147 ~ 154

Szentmiklosy Z.

[1980] S-spaces and L-spaces under Martin's axiom. Collq. Math. Soc. Janos Bolyai 23, Budapest, 1978, II, Amsterdam: North Holland Press, 1980, 1139 ~ 1145

[1983] S-spaces can exist under MA. Topo. Appl. 1983, 16(3):243 ~ 251

Szeptycki P T.

[1993] Countably metacompact space in the constructible universe. Fund. Math. 1993, 143(3):221 ~ 230

Szymanski A.

[1980] Undecidability of the existence of regular extremely disconected S-spaces. Colloq. Math. 1980, 43:61 ~ 67; 1981, 210

Szymanski A. Zhou Haoxuan(周浩旋).

[1981] The behavier of $(\omega^2)^*$ under some consequences of Martin's axiom. *General Topology and Applications to Modern Analysis and Algebra* V, (Prague), 577 ~ 584

Tall F D.

[1974a] The countable chain condition versus separability-Applications of Martin's axiom. Gen. Topo. Appl. 1974, 4:315 ~ 339

[1974b] On the existence of non-metrizable hereditarily Lindelöf spaces with point-countable bases. Duke M.J. 1974, 41:299 ~ 304

[1974c] On the existence of normal metacompact Moore spaces which are not metrizable. Canad. J.M. 1974, 26:1 ~ 6

[1976a] The density topology. Pacific J. M. 1976, 62:275 ~ 284

[1976b] Weakly collectionwise Hausdorff spaces. Topo. Proc. 1976, 1: 295 ~ 304

[1977] First countable spaces with caliber $\aleph_1$ may be or may not be separable. *Set-Theoretic Topology*, 353 ~ 356. New York: Academic Press, 1977

[1978] Normal subspaces of density topology. Pacific J.M. 1978, 75: 579 ~ 588

[1982a] Collectionwise normality without large cardinals. Proc. AMS, 1982, 85:100 ~ 102

[1982b] A note on normality and collectionwise normality. Topo. Proc. 1982, 7:267 ~ 277

[1984] Normality Versus Collectionwise Normality. *Handbook of Set-Theoretic Topology*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984, 685 ~ 732

[1988] A note on collectionwise normality of locally compact normal spaces. Top. Appl. 1988, 28:165 ~ 171

[1994] Some applications of a generalized Martin's axiom. Topo. Appl. 1994, 57:215 ~ 248

Tanaka Y.

[1979] A characterization for the product of closed image of metric spaces to be k-space. Proc. AMS, 1979, 74:166 ~ 170

[1982] Products of CW-complexes. Proc. Math. 1982, 86:503 ~ 507

[1991a] Symmetric spaces, g-developable spaces and g-metrizable spaces. Math. Japonica, 1991, 36:71 ~ 84

[1991b] σ-hereditarily closure-preserving k-networks and g-metrizability. Proc. AMS, 1991, 112:283 ~ 290

Taylor A.

[1981] Diamond principles, ideals and the normal Moore spaces problem. Canad. J.M. 1981, 33:282 ~ 296

Teng Hui(滕辉).

[1990] 乘积空间的正规性及相关性质:[博士学位论文]. 成都:四川大学,1990

Tkacenko M G.

[1979] Bicompacta that are continuous images of sets everywhere dense in the products of spaces. Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 1979, 27(10):797 ~ 802

[1981] An example of a nonmetrizable bicompacta in which each weakly expanded subspace is countable. Mat. Zametki 1981, 29(6): 917 ~ 927; 957

Todorcevic S.

[1981] No S-spaces. Handwriten Notes.

[1990] Calibres of Moore spaces. Note of Sept., 1990.

[1994] Calibres of first countable spaces. Topo. Appl. 1994, 57:317 ~ 319

Ulmer M D.

[1972] Products of weak-compact spaces. Trans. AMS, 1972, 170:279 ~ 284

Uspenski V V.

[1984] Pseudocompact spaces with a σ-point-finite base are metrizable. Comment. Math. Univ. Carolin. 1984, 255 ~ 271

Vaughan J.

[1978] Discrete sequences of points. Topo. Proc. 1978, 3:237 ~ 265

[1979] A countably compact, first countable nonnormal T_2 space. Proc. AMS, 1979, 75:339 ~ 342

Wage M L.

[1976a] Countable paracompactness, normality and Moore spaces. Proc. AMS, 1976, 57:183 ~ 188

[1976b] A collectionwise Hausdorff nonnormal Moore space. Canad. J.

M. 1976, 28:632 ~ 634

[1976c] Extremally disconnected S-spaces. Topo. Proc. 1976, 1:181 ~ 187

[1977] Non-normal spaces. *Set-Theoretic Topology*, New York: Academic Press, 1977, 371 ~ 381

[1978] The dimension of product spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 1978, 75:4671 ~ 4672

Wage M L, Fleissner W, Reed G M.

[1976] Countable paracompactness vs. normality in perfect spaces. Bull. AMS, 1976, 82:635 ~ 639

Wang Guojun(王国俊).

[1981] S-闭空间的性质. 数学学报, 1981, 24:55 ~ 63

Wang Shiqiang(王世强), Yang Shoulian(杨守廉).

[1992] 独立于 ZFC 的数学问题. 北京:北京师范大学出版社,1992

Wang Yanmin(王燕敏).

[1988] New characterizations of pseudocompactness. Bull. Austral Math. 1988, 38:293 ~ 296

Watson W S.

[1981] Pseudocompact, metacompact spaces are compact. Proc. AMS, 1981, 81:151 ~ 152

[1982] Locally compact normal spaces in the constructible universe. Canad. J.M. 1982, 34:1091 ~ 1096

[1984] Separating points and colouring principles. Canad. Math. Bull. 1984, 27:398 ~ 404

[1985a] Separation in countably paracompact spaces. Trans. AMS, 1985, 290:831 ~ 842

[1985b] Pseudocompact meta-Lindelöf space which is not compact. Topo. Proc. 1985, 20:237 ~ 243

[1986] Locally compact normal meta-Lindelöf spaces may not be paracompact: an application of uniformization and Suslin lines. Proc. AMS, 1986, 98:676 ~ 680

[1988] The character of Bing's space. Topo. Appl. 1988, 28:171 ~ 175

[1994] A connected pseudocompact space. Topo. Appl. 1994, 57:151 ~ 162

Watson S, Zhou Haoxuan(周浩旋).

[1989] Caliber(ω_1, ω) is not productive. North York: Technical Report 89 ~ 91. York Univ.

Watson S, Weiss W.

[1988] A topology on union of the double arrow space and the integers. Topo. Appl. 1988, 28:177 ~ 179

Weiss W.

[1975] A solution to the Blumberg problem. Bull. AMS, 1975, 81:957 ~ 958

[1977] The Blumberg ploblem. Trans. AMS, 1977, 230:71 ~ 85

[1978] Countable compact spaces and Martin's axiom. Canad. J. M. 1978, 30:243 ~ 249

[1980] A countable paracompact nonnormal space. Proc. AMS, 1980, 79:487 ~ 490

[1981] Small Dowker spaces. Pacific J.M. 1981, 94:485 ~ 492

[1984] Versions Of Martin's Axiom. HANDBOOK OF SET-THEORETIC TOPOLOGY, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984, 827 ~ 886.

White Jr H E.

[1974] Topological spaces in which Blumberg's theorem holds. Proc. AMS, 1974, 44:454 ~ 462

[1975] An example involving Baire spaces. Proc. AMS, 1975, 48:228 ~ 230

Wicke H H, Worrell Jr J M.

[1976] Point-countablity and compactness. Proc. AMS, 1976, 55:427 ~ 431

Williams S W, Zhou Haoxuan(周浩旋).

[1990] Strong versions of normality. Proc. of the 1990 New York Con-

frence on Topology and Applications.
Wingers L.
[1994] Box products of σ-compact spaces. Topo. Appl. 1994, 56:185 ~ 197
Wiscamb M R.
[1969] The discrete countable chain condition. Proc. AMS, 1969, 23: 608 ~ 611
Wu Lisheng(吴利生).
[1994] 乘积测度扩张公理的某些推论. 苏州大学学报,1994, 10: 183 ~ 185
[1995] 关于乘积测度扩张公理. 苏州大学学报, 1995, 11(4):1 ~ 4
Xu Zhongchang(徐忠昌).
[1995] 正规测度公理的某些结果. 苏州大学学报,1995, 11(4):23 ~ 30
Yang Shoulian(杨守廉).
[1991] 关于紧序数空间可数次箱积的仿紧性. 数学学报, 1991, 34:789 ~ 808
杨守廉,祁金城.
[1984] Rudin-Keisler 序相关于 $\beta\omega/\omega$ 中极小元的某些性质. 数学学报,1984, 4:512 ~ 519
Yang Shoulian(杨守廉),Williams S.
[1987a] On the countable box product of compact ordinals. Topo. Proc. 1987, 12:159 ~ 171
[1987b] 关于序数空间小族的箱积. 科学通报, 1987, 14:1051 ~ 1053
Yun Ziqiu(恽自求).
[1993] Separability and $\aleph^-$ spaces. Q&A in Gen. Topo. 1993, 11:109 ~ 111
Zhong Ning(钟宁).
[1994] Small M_3-space is M_1. Q&A in Gen.Topo. 1994, 12:113 ~ 115
Zhou Haoxuan(周浩旋).

[1979a] Martin 公理及其应用(Ⅰ)(Ⅱ). 华中工学院学报,1979, 3:15～26,1979, 4:33～48

[1979b] 型空间与模型空间. 四川大学学报,1979, 16(2):13～22

[1980] 关于一个 Arhangelski 的猜测. 四川大学学报,1980, 17(2):15～16

[1982a] On the small diagonals. Topo. Appl. 1982, 13(2):283～293

[1982b] 关于第一可数公理的推广与 Arhangelski 问题. 数学学报, 1982, 25:129～135

[1983] A conjecture on compact Frechet spaces. Proc. AMS, 1983, 89:326～328

[1984] On countable compactness and sequential compactness. Proc. AMS, 1984, 90:121～127

[1988] Two applications of set theory to homogeneity. Q&A in Gen. Topo. 1988, 6:49～56

Zhou Haoxuan(周浩旋), van Douwen E K.

[1989] The number of cozero-sets is an ω-power. Topo. Appl. 1989, 33:115～126

Zhou Haoxuan(周浩旋), Fitzpatrik B Jr.

[1992] Countable densehomogeneity and the Baire property. Topo. Appl. 1992, 42:1～14

Zhou Haoxuan(周浩旋), Tanaka Y.

[1984a] Products of closed images of CW-complexes and k-spaces. Proc. AMS, 1984, 92:465～469

[1984b] Spaces dominated by metric spaces. Topo. Proc. 1984, 9:149～163

Zhu Jianping(朱建平).

[1992] On indecomposable subcontinua of $\beta[0,\infty)-[0,\infty)$. Topo. Appl. 1992, 45:261～274

[1993] An application of dominating families. Acta Math. Sinica 1993, 9:70～73

索 引

B

C

D

F

J

K

L

M

N

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

A

B

C

D

F

G

H

K

L

M

N

O

P

Q

W

Z

